

ガンマ分布のパラメータの推定量の 陽的バイアス補正とその検証

Bias reduction methods in the closed form for gamma parameter estimates

鎌倉研究室

17N7100013I 小平 悠水

1 研究目的

ガンマ分布のパラメータの最尤推定量は陽的に求められないことが知られている。そのため、最尤推定量を求める際には、一般的に繰り返し計算が用いられる。しかし、ストリーミングデータの計算などリアルタイムでの計算が必要とされる場合には、このような繰り返し計算の代わりに、より簡便な推定法が必要とされる。

Ye and Chen (2017) は、一般化ガンマ分布の尤度方程式において、ベキパラメータ $\gamma = 1$ としたとき、尤度方程式が、形状パラメータ α と尺度パラメータ β について陽的に解ける点に着目した。これらの解は、ガンマ分布のパラメータ α と β の推定量を与える。また、Ye and Chen (2017) はバイアス補正についても提案しており、 $1/\alpha$ と β の不偏推定量も与えている。しかし Ye and Chen (2017) の推定量は、 α に関して不偏性は確認されていない (Kodaira *et al.*, 2017)。

そこで、本研究では、Ye and Chen (2017) の推定量をバイアス補正することにより、精度の向上を試みる。バイアス補正の方法は、Ye and Chen (2017) の推定量の特性である陽的計算が可能である点を活かすため、同様に、陽的計算によりバイアスを補正する方法を検討する。また、陽的計算が可能であるモーメント推定量についてもバイアス補正を検討する。陽的計算が可能であると、ストリーミングデータ処理など、現代のIoT 社会における計算処理の高速精密化への貢献が期待できる。

2 モデル

2.1 ガンマ分布

ガンマ分布 $\text{gam}(\alpha, \beta)$ の確率密度関数は以下のように表される。

$$f_{\text{gam}}(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), \quad x > 0.$$

ここで、 $\alpha > 0$ は形状パラメータ、 $\beta > 0$ は尺度パラメータ、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数を表す。

ガンマ分布のパラメータの最も一般的な推定法は最尤推定法である。しかし、最尤推定量に対する閉形式表現はない。これは、バッテリーを制限し、メモリやCPUに性能の不足しているモバイル端末ではリアルタイムでデータや信号を処理することが困難になる。一方で、コンピュータの計算能力が十分に高い場合には、対数尤度を数値的に最大化することによって最尤推定量を得られる。しかし、 α が非常に小さい場合、最適化アルゴリズムは収束せず、 α が十分に大きい場合でさえ、尤度最大化には無視できないほどの時間がかかる (Ye and Chen, 2017)。

2.2 一般化ガンマ分布

一般化ガンマ分布 $\text{gg}(\alpha, \beta, \gamma)$ の確率密度関数は以下のように表される。

$$f_{\text{gg}}(x) = \frac{\gamma x^{\alpha\gamma-1}}{\beta^{\alpha\gamma}\Gamma(\alpha)} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma}\right\}, \quad x > 0.$$

ここで、 $\alpha > 0$ は形状パラメータ、 $\beta > 0$ は尺度パラメータ、 $\gamma > 0$ はベキパラメータを表す。

一般化ガンマ分布は、生存時間分析などの分野においてよく用いられる。また、ガンマ分布 ($\gamma = 1$)、ワイブル分布 ($\alpha = 1$)、指数分布 ($\alpha = \gamma = 1$) を含み、極限の場合を考えると、対数正規分布を含む柔軟なモデルである (Lawless, 1980)。

3 先行研究

3.1 Ye and Chen (2017) の推定量

$X \sim \text{gam}(\alpha, \beta)$ とし、 X_1, X_2, \dots, X_n は X の独立同分布であるとする。ここで、 α, β は推定する必要のあるパラメータである。また、 $X^{1/\gamma} \sim \text{gg}(\alpha, \beta, \gamma)$ である。ここで、 $X^{1/\gamma}$ が未知のパラメータ γ を含む一般化ガンマ分布に従う場合を考える。このとき、観測され

た X_1, X_2, \dots, X_n に基づく対数尤度関数は以下のようになる。

$$l_{\text{gg}}(\alpha, \beta, \gamma) = \log \gamma - \alpha \gamma \log \beta - \log \Gamma(\alpha) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[(\alpha \gamma - 1) \log X_i - \left(\frac{X_i}{\beta} \right)^\gamma \right].$$

尤度方程式を解くことにより、 (α, β, γ) の最尤推定量が得られ、特に、 β と γ に関しての尤度方程式を解くことにより、 α と β を得られる。

$$\alpha(\gamma) = \frac{n \sum X_i^\gamma}{n \gamma \sum X_i^\gamma \log X_i - \gamma \sum \log X_i \sum X_i^\gamma},$$

$$\beta(\alpha, \gamma) = \left(\frac{\sum X_i^\gamma}{n \alpha} \right)^{1/\gamma}.$$

ここで、ガンマ分布について考える。 $\gamma = 1$ は既知であるため、上式より、Ye and Chen の推定量が以下のようを得られる。

$$\hat{\alpha}_Y = \frac{n \sum X_i}{n \sum X_i \log X_i - \sum \log X_i \sum X_i}, \quad (1)$$

$$\hat{\beta}_Y = \frac{1}{n^2} \left(n \sum X_i \log X_i - \sum \log X_i \sum X_i \right). \quad (2)$$

この $\hat{\alpha}_Y$ と $\hat{\beta}_Y$ は、一般化ガンマ分布の尤度方程式に基づく推定量である。

3.2 Ye and Chen (2017) のバイアス補正

Ye and Chen (2017) は (1) 式と (2) 式をバイアス補正した以下の推定量 $\hat{\alpha}_Y^{-1}$, $\hat{\beta}_Y$ を不偏推定量として提案している。

$$\hat{\alpha}_Y^{-1\dagger} = \frac{n}{n-1} \hat{\alpha}_Y^{-1} = \frac{n \sum X_i \log X_i - \sum \log X_i \sum X_i}{(n-1) \sum X_i},$$

$$\hat{\beta}_Y^\dagger = \frac{n}{n-1} \hat{\beta}_Y = \frac{1}{n(n-1)} \left(n \sum X_i \log X_i - \sum \log X_i \sum X_i \right).$$

証明の詳細については Ye and Chen (2017) を参照されたい。

不偏推定量 $\hat{\beta}_Y^\dagger$ は、 $\hat{\beta}_Y$ と比較して大きな MSE を持っている。 $n/(n-1)$ により $\hat{\beta}_Y$ のバイアスは減少しているが、分散は増大している。分散の増加がバイアスの減少を追い越し、RMSE の増加につながっている (Ye and Chen, 2017)。

3.3 Cox and Snell (1968) のバイアス補正

パラメータ $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$ を持つ確率分布を考える。 n 個の観測値からなる対数尤度関数を $l(\theta)$ で表

す。ここで独立性は必ずしも必要ない。 $l(\theta)$ が 3 次以下の θ の要素全ての導関数に関して正則であると仮定する。 $i, j, l = 1, 2, \dots, p$ のとき、 $l(\theta)$ の同時キュムラント $\kappa_{ij}, \kappa_{ijl}, \kappa_{ijl}$ を次のように定義する。

$$\kappa_{ij} = E \left[\frac{\partial^2 l}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right], \quad \kappa_{ijl} = E \left[\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_l} \right],$$

$$\kappa_{ij,l} = E \left[\frac{\partial^2 l}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \frac{\partial l}{\partial \theta_l} \right].$$

また、キュムラントの微分を次のように定義する。

$$\kappa_{ij}^{(l)} = \frac{\partial \kappa_{ij}}{\partial \theta_l}.$$

オーダー p の θ に対する Fisher 情報行列 I と、その逆行列 I^{-1} は以下のように表す。

$$I = \{-\kappa_{ij}\}, \quad I^{-1} = \{-\kappa^{ij}\}.$$

Cox and Snell (1968) は θ の s 番目の要素の MLE を $\hat{\theta}_s$ とすれば、 $s = 1, 2, \dots, p$ のとき、 $\hat{\theta}_s$ のバイアス b_s は以下のように表せることを示した。

$$b_s = E \left[\hat{\theta}_s - \theta_s \right] = \sum_{i,j,l=1}^p \kappa^{si} \kappa^{jl} \left[\frac{1}{2} \kappa_{ijl} + \kappa_{ij,l} \right] + O(n^{-2}). \quad (3)$$

Cordeiro and Klein(1994) は、全ての κ が $O(n)$ と仮定される限り (3) 式の独立性の仮定は緩和できることを証明し、 b_s を以下のように表した。

$$b_s = E \left[\hat{\theta}_s - \theta_s \right] = \sum_{i=1}^p \kappa^{si} \sum_{j,l=1}^p \left[\kappa_{ij}^{(l)} - \frac{1}{2} \kappa_{ijl} \right] \kappa^{jl} + O(n^{-2}) \quad (4)$$

(4) 式は $\kappa_{ij,l}$ を含む項がないため、(3) 式よりも計算上効率が良い (Giles *et al*, 2016)。 (4) 式は MLE のバイアスペクトル b に対する表現を与えるため、行列表記で表すことができる。ここで、 $l = 1, 2, \dots, p$ について A を以下のようにおく。

$$A = \left\{ A^{(1)} | A^{(2)} | \dots | A^{(p)} \right\}.$$

ここで、 $A^{(l)}$ は以下のように表す。

$$A^{(l)} = \kappa_{ij}^{(l)} - \frac{1}{2} \kappa_{ijl}.$$

このとき、 $\hat{\theta}$ が MLE ベクトルを表すならば、バイアスは以下のように表せる。

$$b = E \left[\hat{\theta} - \theta \right] = I^{-1} \text{Avec} \left[I^{-1} \right] + O(n^{-2}). \quad (5)$$

よって、バイアス補正した推定量 $\hat{\theta}^*$ は次のように表せる。

$$\hat{\theta}^* = \hat{\theta} - \hat{b}. \quad (6)$$

これは MLE (\hat{b}) で評価された MLE バイアスペクトルである (5) 式と MLE ベクトル ($\hat{\theta}$) との差である。

4 提案推定量

4.1 Cox and Snell (1968) による Ye and Chen (2017) の推定量の1次のバイアス補正

Cox and Snell (1968) により, Ye and Chen (2017) の推定量の1次のバイアスを計算すると, 以下のようになる.

$$E(\hat{\alpha}_Y - \alpha) = \frac{-2 + \alpha\psi^{(1)}(\alpha) - \alpha^2\psi^{(2)}(\alpha)}{2n\{-1 + \alpha\psi^{(1)}(\alpha)\}^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$E(\hat{\beta}_Y - \beta) = \frac{\beta\{\psi^{(1)}(\alpha) + \alpha\psi^{(2)}(\alpha)\}}{2n\{-1 + \alpha\psi^{(1)}(\alpha)\}^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4.2 デルタ法による Ye and Chen (2017) の推定量の1次のバイアス補正

デルタ法により, Ye and Chen (2017) の推定量の1次のバイアスを計算すると, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} E(\hat{\alpha}_Y - \alpha) = & \frac{\alpha^2\psi^{(1)}(\alpha) + 2\alpha - 1}{n} \\ & + \frac{-2\alpha^2\{4\psi^{(1)}(\alpha) + \psi^{(2)}(\alpha)\}}{n^2} \\ & + \frac{-4\alpha\{\psi^{(1)}(\alpha) + 1\} + 5}{n^2} \\ & + \frac{3\alpha^3\{3\psi^{(1)}(\alpha)^2 + \psi^{(3)}(\alpha)\}}{n^3} \\ & + \frac{\alpha^2\{2\psi^{(1)}(\alpha)\{9\psi^{(1)}(\alpha) + 32\}\}}{n^3} \\ & + \frac{\alpha^2\{51\psi^{(2)}(\alpha) + 6\psi^{(3)}(\alpha)\}}{n^3} \\ & + \frac{\alpha\{86\psi^{(1)}(\alpha) + 18\psi^{(2)}(\alpha) + 20\}}{n^3} \\ & + \frac{-18\psi^{(1)}(\alpha) - 31}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

また, β のバイアス補正式は以下のようになる.

$$E(\hat{\beta}_Y - \beta) = -\frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4.3 デルタ法による Ye and Chen (2017) の推定量の重み付きバイアス補正

(7) 式において, 1次, 2次, 3次のバイアス補正式をそれぞれ $\text{BIAS}_1(\hat{\alpha}_Y, n)$, $\text{BIAS}_2(\hat{\alpha}_Y, n)$, $\text{BIAS}_3(\hat{\alpha}_Y, n)$ とおく. 図1を見ると, n に関して3次の補正式を挟んで, 1次, 2次の補正式があることがわかる. よって, これらの補正式の重み付き平均を考えることにより, バイアス補正を改良することを考える. 重みは, 単純平

均ではなく, n の次数が上がると減少するようにし, p は経験的に決定する.

$$w_1 = \frac{n^{-p}}{n^{-p} + n^{-2p} + n^{-3p}},$$

$$w_2 = \frac{n^{-2p}}{n^{-p} + n^{-2p} + n^{-3p}},$$

$$w_3 = \frac{n^{-3p}}{n^{-p} + n^{-2p} + n^{-3p}}.$$

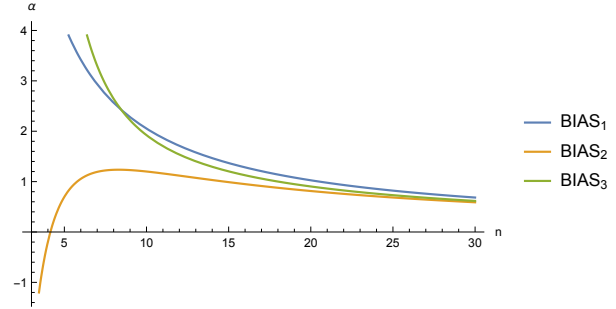


図 1: 1次, 2次, 3次の補正式のグラフ

実際には次式によりシミュレーションを行う.

$$E(\hat{\alpha}_Y - \alpha) = \frac{w_1\text{BIAS}_1(\hat{\alpha}_Y, n) + w_2\text{BIAS}_2(\hat{\alpha}_Y, n) + w_3\text{BIAS}_3(\hat{\alpha}_Y, n)}{w_1 + w_2 + w_3} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (8)$$

4.4 デルタ法によるモーメント推定量のバイアス補正

オーダーは定数をかけても変化しないため, バイアス補正式 (8) を調整パラメータ k で調整することを考える.

$$\begin{aligned} E(\hat{\alpha}_{\text{MM}} - \alpha) = & k \times \left\{ \frac{\alpha^2\beta(5n^3 - 9n^2 + 3n - 1)}{\alpha\beta(n-1)^4} \right. \\ & + \frac{\alpha\beta(7n^3 - 5n^2 - 3n - 1)}{\alpha\beta(n-1)^4} \\ & \left. + \frac{2(n-1)n(3\beta - n + 1)}{\alpha\beta(n-1)^4} \right\} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

5 シミュレーション

以下の条件のもとシミュレーションを行う.

- 真のパラメータ: $\alpha = 0.5, 1, 3, 5, 7$, $\beta = 1$
- 繰り返し回数: 100000
- サンプルサイズ: $n = 5, 10, 20$

6 まとめ

Ye and Chen (2017) の推定量 $\hat{\alpha}_Y$, $\hat{\beta}_Y$ は, 最尤推定量 $\hat{\alpha}_{ML}$, $\hat{\beta}_{ML}$ と同等の精度である. これは, Ye and Chen (2017) の推定量 $\hat{\alpha}_Y$, $\hat{\beta}_Y$ は, 一般化ガンマ分布の尤度方程式から, ベキパラメータ $\gamma = 1$ とおいて求めた推定量であるためと考えられる.

サンプルサイズが $n = 3$ のように小さい場合でもパラメータの推定が可能であるのは, 重み付き平均でバイアス補正をした推定量である. MSE は大きくなってしまふものの, 推定量と真値の近さは最も良いといえる. 計算の簡便性なども含めて考慮すると, Cox and Snell (1968) による Ye and Chen (2017) の推定量の 1 次のバイアス補正とデルタ法による Ye and Chen (2017) の 1 次のバイアス補正をした推定量の実用性が高いと考えられる. どちらも, サンプルサイズ $n = 5$ の時点では, ほぼ真値に近い値でパラメータ推定が可能である.

参考文献

- [1] Cordeiro, G. M., & Klein, R. (1994). Bias correction in ARMA models. *Statistics & Probability Letters*, **19**(3), 169-176.
- [2] Cox, D. R., & Snell, E. J. (1968). A general definition of residuals. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 248-275.
- [3] Giles, D. E., Feng, H., & Godwin, R. T. (2016). Bias-corrected maximum likelihood estimation of the parameters of the generalized Pareto distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **45**(8), 2465-2483.
- [4] Kodaira, Y., Abe, K., Sakumura, T., & Kamakura, T. (2017). Bias reduction of ML estimators of gamma distribution parameters and comparison with other methods. *Technometrics, Book of abstracts on 2017 Hangzhou International Statistical Symposium*.
- [5] Lawless, J. F. (1980). Inference in the generalized gamma and log gamma distributions. *Technometrics*, **22**(3), 409-419.
- [6] Ye, Z. S., & Chen, N. (2017). Closed-Form Estimators for the Gamma Distribution Derived from Likelihood Equations. *The American Statistician*, **71**(2), 177-181.

表 1: 推定量の平均

		MLE	MME	Ye and Chen	
n	α	$\hat{\alpha}_{ML}$	$\hat{\alpha}_{MM}$	$\hat{\alpha}_Y$	$\hat{\alpha}_Y^\dagger$
5	0.5	1.02	1.11	1.04	0.83
	1	2.20	2.06	2.22	1.78
	3	7.17	6.02	7.18	5.75
	5	12.04	9.91	12.05	9.64
	7	17.11	13.96	17.12	13.70
10	0.5	0.65	0.78	0.67	0.60
	1	1.35	1.42	1.36	1.23
	3	4.21	4.00	4.22	3.79
	5	7.05	6.56	7.06	6.35
	7	9.89	9.11	9.90	8.91
20	0.5	0.56	0.65	0.57	0.54
	1	1.14	1.21	1.15	1.09
	3	3.50	3.46	3.50	3.33
	5	5.85	5.69	5.85	5.56
	7	8.20	7.92	8.20	7.79
proposed estimators					
n	α	$\hat{\alpha}_Y^{c*}$	$\hat{\alpha}_Y^{d*1}$	$\hat{\alpha}_Y^{d*p}$	$\hat{\alpha}_{MM}^{d*k}$
5	0.5	0.51	0.48	0.50	0.66
	1	1.00	0.97	1.00	1.04
	3	3.00	2.96	3.00	3.01
	5	4.95	4.91	5.00	5.00
	7	6.98	6.94	7.00	7.00
10	0.5	0.51	0.49	0.50	0.55
	1	1.01	0.99	1.00	1.01
	3	3.01	3.00	3.00	3.00
	5	5.01	4.99	5.00	5.00
	7	7.00	6.98	7.00	7.00
20	0.5	0.51	0.50	0.50	0.52
	1	1.01	1.00	1.00	1.00
	3	3.01	3.00	3.00	3.00
	5	5.01	5.00	5.00	5.00
	7	7.00	7.00	7.00	7.00

表 2: MSE

		MLE	MME	Ye and Chen	
n	α	$\hat{\alpha}_{ML}$	$\hat{\alpha}_{MM}$	$\hat{\alpha}_Y$	$\hat{\alpha}_Y^\dagger$
5	0.5	4.14	3.07	4.18	2.60
	1	22.38	14.68	22.39	13.98
	3	348.73	222.40	349.08	219.75
	5	557.33	350.64	557.71	346.66
	7	1841.60	1161.57	1841.24	1157.68
10	0.5	0.14	0.27	0.15	0.11
	1	0.72	0.86	0.73	0.54
	3	8.46	7.23	8.53	6.34
	5	22.65	18.29	22.76	16.83
	7	45.30	35.57	45.42	33.63
20	0.5	0.03	0.09	0.04	0.03
	1	0.16	0.27	0.16	0.14
	3	1.75	1.87	1.77	1.48
	5	5.06	4.92	5.11	4.27
	7	10.09	9.39	10.15	8.48
proposed estimators					
n	α	$\hat{\alpha}_Y^{c*}$	$\hat{\alpha}_Y^{d*1}$	$\hat{\alpha}_Y^{d*p}$	$\hat{\alpha}_{MM}^{d*k}$
5	0.5	0.64	0.63	0.70	1.88
	1	3.36	3.36	3.63	7.09
	3	53.07	53.08	54.40	79.75
	5	81.30	81.31	84.21	109.72
	7	278.23	278.24	282.77	345.68
10	0.5	0.06	0.06	0.06	0.16
	1	0.30	0.30	0.30	0.49
	3	3.46	3.46	3.47	4.18
	5	9.08	9.08	9.12	10.34
	7	18.14	18.14	18.26	19.98
20	0.5	0.02	0.02	0.02	0.06
	1	0.10	0.10	0.10	0.18
	3	1.10	1.10	1.10	1.37
	5	3.17	3.17	3.17	3.63
	7	6.29	6.29	6.30	6.94

ML: 最尤推定量 MM: モーメント推定量
Y: Ye and Chen (2017) の推定量
†: Ye and Chen (2017) のバイアス補正
c*: Cox and Snell (1968) の 1 次のバイアス補正
d*1: デルタ法の 1 次のバイアス補正
d*p: 重み付き平均でバイアス補正
d*k: 調整パラメータでバイアス補正