国債先物データを用いたオプションの価格付け
The option pricing using government bond futures data

経営システム工学専攻　永井　拓哉

1　はじめに

オプション市場の価格付け理論にはブラック・ショールズモデルが最もよく使われてきた。このモデルは, オプションの価格付け理論を計算する際に原資産のボラティリティを一定であると仮定して計算される。しかし, 実際の原資産のボラティリティは時間を通じて変化するものであると多くの研究で実験的に示されている。ボラティリティは, オプション価格を決める上で大事なパラメータの1つである。ボラティリティの変動性を定式化したものとしてボラティリティ変動モデルがある。このモデルは, 大きく2つに分けられる。1つはEngle(1982)のARCHモデルである。ARCH型モデルは,t期のボラティリティを$t-1$期にすでに値がわかっている変数だけの確定的な関数で定式化することができる。もう1つは, 確率的分散モデル(SV)モデルである。SVモデルは, ボラティリティの対数値の変動を線形のARMAモデルによって定式化さる。しかしt期のボラティリティが$t-1$期に既知にならないためモデルのパラメータ推定が難しいとされる。

近年, マイナス金利導入の影響で日本国債先物のボラティリティの変動性が大きくなった。ボラティリティの変動性が大きくなった時, 将来のボラティリティを予測しようとするボラティリティ変動モデルにどのような影響があるのだろうか。また, 過去のボラティリティによって理論価格を正確に計算できるとされているこのモデルは, マイナス金利のデータが含まれる場合と含まれない場合で実際の価格のオプション価格とどのくらい乖離するのか明らかにしたい。

2　モデル紹介

2.1　時系列分析の基礎

収益率(価格変化率)R_tを$t-1$期において, 予測可能な変動μ_tと予測不可能な変動ε_tの和

$$R_t = \mu_t + \varepsilon_t \tag{1}$$

として表す。またμ_tを期待収益率,ε_tを予測誤差と呼ぶ。さらにボラティリティ変動モデルは予測誤差ε_tを常に非負の値をとるσ_tと独立で同一な期待値0, 分散1の正規分布に従う確率変数z_tとの積

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t \qquad \sigma_t > 0, z_t \sim N(0,1) \tag{2}$$

と表す。このσ_tをR_tのボラティリティと呼ぶ。本研究のオプションの理論価格には, 国債先物の$t-1$期からt期の収益率(価格変化率)を$R_t = (S_t - S_{t-1})/S_{t-1}$で定義する。ただし$S_t, S_{t-1}$は$t$期と$t-1$期の国債先物の終値を表す。収益率をこのように定義すると, 投資家の危険中立性を仮定した時は期待収益率μ_tは安全資産の金利rと等しくなる。

$$R_t = r + \varepsilon_t \tag{3}$$

2.2　ボラティリティ変動モデル

ARCH型モデルの特徴はt期のボラティリティを$t-1$期の既知の変数だけで確定的な関数として定式化できることである。Engle(1982)によって提案されたARCH(q)モデルはσ_t^2を過去の収益率の予期せざるショックの2乗ε_{t-1}^2,ε_{t-2}^2,$\cdots$,ε_{t-q}^2の線形関数として定式化される。

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \tag{4}$$

$$\omega > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, q$$

2.2.1　GARCHモデル

Bollerslev(1986)によって, ボラティリティの説明変数に過去の過去の収益率の予期せざるショックの2乗だけではなく, 過去のボラティリティの値を加えた次のモデルが提案された。

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 \quad (5)$$

$$\omega > 0, \quad \beta_i, \alpha_j \geq 0 \quad i = 1, 2, \cdots \ p, j = 1, 2, \cdots, q$$

このモデルは p=0 とすると ARCH(q) モデルになり ARCH モデルを一般化したい意味で GARCH(Generalized ARCH) モデルと呼ばれる。GARCH モデルでもボラティリティσ_t^2 の非負性を保証するためにパラメータに非負制約が必要である。本研究では GARCH(1,1) を用いた。

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2, \quad \omega > 0, \quad \beta, \alpha \geq 0 \quad (6)$$

ここで, パラメータに非負制約を課すのは, ボラティリティσ_t^2 の非負性を保証するためである。このモデルでは, ボラティリティに対するショックの持続性を $\alpha + \beta$ の値によって計る事ができ,$\alpha + \beta$ の値が 1 に近いほど高いとされる。 実際の市場において, 国債先物取引には非対称性が見られる。しかし ARCH モデル及び GARCH モデルは, ボラティリティ変動の非対称性に対応していない。こうしたボラティリティ変動の非対称性を取り入れたモデルがある。その代表的なモデルに Glosten Jagannathan and Runkle(1993) が提案した GJR モデルや Nelson(1991) が提案した EGARCH モデルがある。

2.2.2 GJR モデル

Glosten Jagannathan and Runkle(1993) によって提案されたモデルは以下のようにと表せられる。

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} (\alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \gamma_j D_{t-j}^- \varepsilon_{t-j}^2) \quad (7)$$

$$\omega > 0, \beta_i, \alpha_j, \gamma_j \geq 0, i = 1, 2, \cdots, p, j = 1, 2, \cdots, q$$

GJR モデル ε_{t-1} が負であれば 1, それ以外ならば 0 であるようなダミー変数 D_{t-j}^- を用いることでボラティリティ変動の非対称性を捉えようとする。本研究では,GJR(1,1) を用いる。

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + (\alpha + \gamma D_{t-1}^-) \varepsilon_{t-1}^2 \quad (8)$$

$$\omega > 0, \quad \beta, \alpha, \gamma \geq 0$$

このモデルでも σ_t^2 の値が負にならないように, パラメータに非負制約が必要である。前日の予測誤差 ε_{t-1} が正の値ならば D_{t-1}^-=0 なので

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 \quad (9)$$

となる。これに対して ε_{t-1} が正の値ならば D_{t-1}^-=1 なので

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + (\alpha + \gamma) \varepsilon_{t-1}^2 \quad (10)$$

となる。このモデルでは, ボラティリティに対するショックの持続性を $\alpha + \beta + \frac{\gamma}{2}$ の値によって計る事ができる。そして $\alpha + \beta + \frac{\gamma}{2}$ の値が 1 に近いほど持続性が高いとされる。

2.2.3 EGARCH モデル

ARCH,GARCH,GJR モデルでは, 左辺を σ_t^2 としていた。これに対して Nelson(1991) は左辺を $\log(\sigma_t^2)$ として, パラメータに非負制約の必要性を取り除き, 負の値も取りえる変数でも右辺に説明変数として加えること可能になる。そして, このモデルは過去の収益率の予測誤差 ε_{t-1} をボラティリティσ_{t-1} で割って基準化された z_{t-1} を右辺に加えることでボラティリティ変動の非対称性を捉えようとする。EGARCH モデルは, 以下のように表される。

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \log(\sigma_{t-i}^2) \sum_{j=1}^{q} \theta_j (\gamma z_j$$

$$+ \alpha(|z_{t-j}| - E(|z_{t-j}|)) \quad (11)$$

ボラティリティに対するショックの持続性は β の値が 1 に近いほど高いとされる。

2.3 オプション価格の導出方法

危険中立性を仮定した時, オプションの価格は満期におけるオプション価格を安全資産である金利 r から

割り引いた割引現在価値になる。$T-\tau$ 期を満期とする権利行使価格 K のコールオプションの T 期の価格を渡部 (2003) の方法でシミュレーションを行う。

$$C_T = (1+r)^{-\tau} E[\max(S_{T+\tau} - K, 0)] \tag{12}$$

$S_{T+\tau}$ はオプションの満期 $T+\tau$ 期の原資産価格である。また右辺の期待値は、シミュレーションによって評価する。シミュレーションを行い $(S^{(1)}_{T+\tau}, S^{(2)}_{T+\tau}, \cdots, S^{(n)}_{T+\tau})$ が得られ ,n が十分に大きいならば期待値は以下の式で評価できる。

$$E[\max(S_{T+\tau} - K, 0)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \max(S^{(i)}_{T+\tau} - K, 0) \tag{13}$$

以下の流れによってオプション価格を導入する。

1. 満期 1 か月前から 1500 営業日前の変化率 $(R_1, R_2, \cdots, R_T)$ を使い ARCH 型モデルの未知パラメータを推定する。

2. 互いに独立な標準正規分布から $\{z^{(i)}_{T+1}, z^{(i)}_{T+2}, \cdots, z^{(i)}_{T+\tau}\}^n_{i=1}$ をサンプリングする。

3. 2 でサンプリングされた値を $R_t = r + \sqrt{\sigma_t^2} Z_t$ に代入することで $\{R^{(i)}_{T+1}, R^{(i)}_{T+2}, \cdots, R^{(i)}_{T+\tau}\}^n_{i=1}$ を計算する。

4. 次の式を使ってオプションの満期 $T+\tau$ 期における原資産価格 $(S^{(1)}_{T+\tau}, S^{(2)}_{T+\tau}, \cdots, S^{(n)}_{T+\tau})$ を計算する。

$$S^{(i)}_{T+\tau} = S_T \prod_{s=1}^{\tau}(1 + R^{(i)}_{T+s}) \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

5. 次の式からオプションの価格 C_T を計算する。

$$C_T \approx (1+r)^{-\tau} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \max(S^{(i)}_{T+\tau} - K, 0)$$

3 実証結果

3.1 データ

実証分析を以下のデータに基づいて行う。

1. 日本国債先物 (2009 年 4 月 1 日から 2018 年 9 月 4 日までの日次データ：インベスティング・ドットコム)
2. 日本国債先物のオプションの価格 (2015 年 2 月 2 日から 2018 年 8 月 1 日：Bloomberg)
3. 安全資産の金利 (2009 年 4 月 1 日から 2018 年 9 月 1 日までの無担保コールレート：日本銀行)

3.2 パラメータ推定について

ARCH 型モデルのパラメータは, 国債先物オプションの満期から 30 日前から, さらに 1500 営業日前までの日本国債先物の日次変化率と金利を用いて推定を行った。パラメータの推定に用いた標本の大きさは $T = 1500$ である。S_t を第 t 日の日本国債先物の終値とすると, 第 t 日の国債先物変化率は $R_t = (S_t - S_{t-1})/S_{t-1}$ として計算する。ボラティリティに対するショックの持続性は,GARCH モデルでは $\alpha + \beta$,GJR モデルは $\alpha + \beta + \frac{\gamma}{2}$,EGARCH モデルは β の値で測ることができる。

3.3 オプション価格の推定値の比較

次に推定した価格と実際の価格を比較し, どのモデルのパフォーマンス示す。そのため, 以下の指標を使う。$\hat{C}_i, C_i$ はそれぞれオプションの推定値と実際の価格とする。

$$MER = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\hat{C}_i - C_i}{C_i} \tag{14}$$

$$RMSER = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (\frac{\hat{C}_i - C_i}{C_i})^2} \tag{15}$$

MER は, モデルがオプション価格がどれだけ過少 (数値が負の時) か過大 (数値が正の時) かを評価する指標である。RMSER は, 全体的にオプションの理論価格が実際価格とどれだけ乖離しているかを表す指標である。表 1 は, 各モデルのパフォーマンスを表している。そして推定結果の期間は, マイナス金利のデータが含まれていない期間と含まれている期間である。

表 1: 各モデルのパフォーマンス比較

	モデル	含まない	含む
MER	GARCH	-0.035	0.106
	GJR	-0.006	0.035
	EGARCH	-0.010	-0.169
RMSER	GARCH	0.087	0.580
	GJR	0.055	0.551
	EGARCH	0.056	0.394

4 結論・考察・今後の課題

4.1 結論

GARCH モデルによるオプションの理論価格と実際価格の乖離は,8.7%から 58%に大きく上昇した。オプションの理論価格については,3.5%の過小評価から 10.5%の過大評価へと変動している。GJR モデルによるオプションの理論価格と実際価格の乖離は,5.4%から 55%に大きく上昇した。オプションの理論価格については,0.6%の過小評価から 3.5%の過大評価へ変動している。EGARCH モデルによるオプションの理論価格と実際価格の乖離は,5.5%から 39.4%に大きく上昇した。オプションの理論価格については,1%の過小評価から 16.9%の過小評価へ増加している。以上をまとめると, マイナス金利データを含んでいない場合 3 つの ARCH 型モデルの推定値と実際の価格の乖離は小さいがマイナス金利データを含んでいる場合, 大きく乖離してしまうことが明らかになった。

4.2 考察

各モデルのパフォーマンス比較の結果から金利データが正の値と負の値の両方含んでいる場合だと今回使用した 3 つの ARCH 型モデルは適していないと思われる。そのため正の値と負の値の両方含んでいる場合でも適応できるモデルを見つける必要があると考える。

4.3 今後の課題

今後の課題として GARCH,GJR,EGARCH 以外のモデルならば実際の価格に近くになるモデルが見つかる可能性があるため他の ARCH 型モデルも検証する。また,2016 年 3 月以降のデータのみで導きだされたパラメータによってシミュレーションされる推定価格と実際価格を比較することである。さらに ARCH 型モデルだけではなく,SV モデルでもオプションの価格付けが研究されているため SV モデルの面からも研究する必要がある。

5 参考文献

参考文献

[1] 渡部敏明. "日経 225 オプションデータを使った GARCH オプション価格付けモデルの検証." 日本銀行金融研究所 『金融研究』 22 (2003)

[2] 釜江廣志, and 皆木健男. "わが国国債先物市場の効率性: ティック・データによる検証." 生活経済学研究 20 (2004): 21-43.

[3] Engle, Robert F. "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation." Econometrica: Journal of the Econometric Society (1982): 987-1007.

[4] Bollerslev, Tim. "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity." Journal of econometrics 31.3 (1986): 307-327.

[5] Glosten, Lawrence R., Ravi Jagannathan, and David E. Runkle. "On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks." The journal of finance 48.5 (1993): 1779-1801.

[6] Nelson, Daniel B. "Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach." Econometrica: Journal of the Econometric Society (1991): 347-370.

[7] Bakshi, Gurdip, Charles Cao, and Zhiwu Chen. "Empirical performance of alternative option pricing models." The Journal of finance 52.5 (1997): 2003-2049.