α パーセンタイルオプションを用いた株式変動型変額保険におけるリスク低減

Risk reduction in equity-linked life insurances by use of some α-percentile option

経営システム工学専攻　新川 貴広

1.　序論

生命保険の保険料は各保険契約が持つリスクによって決定されている。このリスク量を適切に設定しなければ、保険契約を管理する保険会社が必要以上の保険料を受け取ることで不当に大きな利益を得る事態が生じてしまったり、逆に、保険会社が受け取る保険料が必要に満たないと、最悪の場合、保険金が支払えず、保険会社自体の存続が難しい事態が生じてしまう。これを防ぐために、それぞれの保険契約が持つリスクを適切に分析し、設定しなくてはならない。

しかしながら、設定したリスクが正しいものであるとは限らない。特に保険金額が株式などの評価額に依存する「変額保険」は、環境の影響を受けやすく、設定したリスクが正しくなくなる可能性が比較的高い。これが変額保険におけるリスクの一つである。

本研究では、株式のボラティリティが変化する場合において、株式連動型変額保険の保険料 (ヘッジ費用) の増加を抑えることを目的として α パーセンタイルを用いた株式連動型変額保険のヘッジ費用とその有効性について研究した。

2.　変額保険の概要

株式オプションをはじめとしたデリバティブでは、運用対象・行使条件 (満期など) を選択し、条件を満たしたときその運用成果を受け取れる。この行使条件を死亡・ケガ・保険期間満了などの一般的な保険の保険金支払事由に変更し、最低保証を付加することで保険商品として成立し、変額保険が誕生した。ここではその最低保証の代表的なもの、また、そのリスクについて述べる。([1] の第 5 章）

2.1.　代表的な最低保証

1. 最低死亡給付保証 (GMDB : guaranteed minimum death benefit)
   死亡保険金の最低額が運用成果に関わらず、あらかじめ保証される契約。
2. 最低生存給付保証 (GMLB : guaranteed minimum living benefit)
   年金開始時 (保険満期時) の生存に対する保険金の最低額が運用成果に関わらず、あらかじめ保証される契約。以下の 2 種類に更に分類される。
   (i) 最低年金受取額給付保証 (GMIB : guaranteed minimum income benefit)
   年金開始時までに積み立てた額を保証利率で運用し、年金として給付する契約。
   (ii) 最低年金原資給付保証 (GMAB : guaranteed minimum accumulation benefit)
   年金開始時の年金原資が運用成果に関わらず保証される契約。

本研究では、GMDB に GMAB を組み合わせた変額保険について研究する。また、3 章以降での「変額保険」は「株式連動型変額保険」のことを指す。

2.2.　最低保証のリスク

変額保険の給付内容は契約者の選択した運用対象の評価額とその運用対象のプットオプションの清算金から構成されている。例えば、最低満期給付保障割合が 100%のヨーロピアンオプション型の変額保険では契約者が一時払い保険料として K を支払った場合、運用対象の保険金支払い時の評価額が K 以下の値 S であっても満期時の保険金として K を受け取ることが保証されている。つまりこの時の $K-S$ の損失は保険会社が負うこととな

る。この損失に対してのリスクヘッジを保険会社側は一時払い保険料 K とは別に保険料を徴収する形で行う必要がある。

3.　α パーセンタイルオプション型の変額保険

本章では、本研究の目的の一つである α パーセンタイルオプション型の変額保険のヘッジ費用の導出を行う。初めに α パーセンタイルがどの様に定義されるのかについて、また、α パーセンタイルの確率密度関数についての文献 [2] を紹介する。

3.1.　確率過程の α パーセンタイル密度関数

確率過程 X_t について,

$$A_X(t,x) = \frac{1}{t}\int_0^t 1_{(-\infty,x)}(X_s)ds \quad \left(\text{但し、}1_{(-\infty,x)}(X_s) = 1(X_s \le x),\ 0(X_s > x)\right)$$

を定める。

t を定数とすると、$A_X(t,x)$ は x について増加関数であるので逆関数 $m_X(t,x)$ が存在する。この時、$m_X(t,\alpha)$ は $X_s(0 < s < t)$ の α パーセンタイルと呼ばれる。

特に $X_t = \mu t + \sigma W_t$ のとき、$m_X(t,\alpha)$ の確率密度関数 $g(x;\alpha,t)$ は

$$g(x;\alpha,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x-y;\alpha t)g_2(y;(1-\alpha)t)dy$$

で求められる。但し、

$$\begin{aligned} g_1(x;t) &= \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right) - \frac{2\mu}{\sigma^2}\exp\left(\frac{2\mu x}{\sigma^2}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{x+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right](x>0) \\ g_2(x;t) &= \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right) + \frac{2\mu}{\sigma^2}\exp\left(\frac{2\mu x}{\sigma^2}\right)\Phi\left(\frac{x+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)(x<0) \end{aligned}$$

である。

3.2.　前提条件

株価過程 S_t はブラック・ショールズモデルに従うとする。また、初めからリスク中立のモデルであると考える。つまり、株価過程 S_t、債券の価格過程 B_t が、r を債券の利率、σ を株式のボラティリティ、W_t をブラウン運動として、

$$S_t = Se^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t}, B_t = e^{rt}$$

に従うと仮定する。また、株式・債券ともに自由に売り買いできるものと考える。

更に、株価過程 S_t について、

$$S_t = Se^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t} = Se^{X_t}$$

となる確率過程 X_t をとり、X_t の α パーセンタイルを $m_X(t,\alpha)$ とするとき、$Se^{m_X(t,\alpha)}$ を株価の α パーセンタイルとする。

この時、$m_X(t,\alpha)$ の確率密度関数 $g^*(x;\alpha,t)$ は 3.1 節の g について$\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2$ としたものとする。

3.3.　保険料の算出

初めに、算出にかかわるパラメータについて、μ を保険契約者の死力、T を保険満期までの期間、K を変額保険の最低保証価格、x_0 を $t=0$ での保険契約者の年齢と定義する。

最低保証は GMAB と GMDB を採用し、

— 満期 T まで生存した場合の給付 (GMAB に関わる給付) は $\max\left(K, Se^{m_X(T,\alpha)}\right)$

— 時刻 t $(0 \le t \le T)$ で死亡した場合の給付 (GMDB に関わる給付) は $\max(K, Se^{m_X(t,\alpha)})$ とする。

時刻 t での保険会社側の GMAB に関わる損失に対してのヘッジ費用を P_t^1 、GMDB に関わる損失に対してのヘッジ費用を P_t^2 とすると、時刻 t での α パーセンタイルオプション型の変額保険のヘッジ費用 P_t は $P_t = P_t^1 + P_t^2$ と表される。

GMAB に関してのヘッジ費用 P_t^1

GMAB に関してのヘッジ費用 P_t^1 は、

$$P_t^1 \quad = \quad {}_{T-t}p_{x_0+t} E^Q[e^{-r(T-t)}(K - Se^{m_X(T,\alpha)})^+ \mid \mathcal{F}_t] = {}_{T-t}p_{x_0+t} e^{-r(T-t)} E^Q[(K - Se^{m_X(T,\alpha)})^+ \mid \mathcal{F}_t]$$

$$E^Q\left[(K - Se^{m_X(T,\alpha)})^+ \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$= \int_0^K 1_{(l(z,t) \ge t-(1-\alpha)T)} dz - \int_0^K \int_{\log \frac{z}{S_t}}^{\infty} g^*\left(x; \frac{\alpha T - l(z,t)}{T-t}, T-t\right) dx \times 1_{(t-(1-\alpha)T < l(z,t) < \alpha T)} dz$$

$$l(z,t) = \int_0^t 1_{(X_s \le \log \frac{z}{S_0})} ds$$

ここで、$t < \min(\alpha T, (1-\alpha)T)$ のとき、

$$P_t^1 \quad = \quad \int_0^K dz - \int_0^K \int_{\log \frac{z}{S_t}}^{\infty} g^*\left(x; \frac{\alpha T - l(z,t)}{T-t}, T-t\right) dx dz = \int_{-\infty}^{\log \frac{K}{S_t}} (K - S_t e^x) g^*\left(x; \frac{\alpha T - l(z,t)}{T-t}, T-t\right) dx$$

よって、

$$P_t^1 = {}_{T-t}p_{x_0+t} e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\log \frac{K}{S_t}} (K - S_t e^x) g^*\left(x; \frac{\alpha T - l(z,t)}{T-t}, T-t\right) dx$$

$t = 0$ のとき、

$$P_0^1 \quad = \quad {}_T p_{x_0} e^{-rT} \int_{-\infty}^{\log \frac{K}{S_0}} (K - S_0 e^x) g^*(x; \alpha, T)\, dx$$

GMDB に関してのヘッジ費用 P_t^2

GMDB に関してのヘッジ費用 P_t^2 は、

$$P_t^2 \quad = \quad \int_t^T E^Q[e^{-r(s-t)}(K - Se^{m_X(s,\alpha)})^+ \mid \mathcal{F}_t]_{s-t}p_{x_0+t}\mu_{x_0+s} ds = \mu \int_t^T e^{-(r+\mu)(s-t)} E^Q[(K - Se^{m_X(s,\alpha)})^+ \mid \mathcal{F}_t] ds$$

$$E^Q\left[(K - Se^{m_X(s,\alpha)})^+ \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$= \int_0^K 1_{(l(z,t) \ge t-(1-\alpha)s)} dz - \int_0^K \int_{\log \frac{z}{S_t}}^{\infty} g^*\left(x; \frac{\alpha s - l(z,t)}{s-t}, s-t\right) dx \times 1_{(t-(1-\alpha)s < l(z,t) < \alpha s)} dz$$

$$l(z,t) = \int_0^t 1_{(X_s \le \log \frac{z}{S_0})} ds$$

$t = 0$ のとき、

$$P_0^2 \quad = \quad \mu \int_0^T e^{-(r+\mu)s} \int_{-\infty}^{\log \frac{K}{S_0}} (K - S_0 e^x) g^*(x; \alpha, s)\, dx ds$$

4. ヘッジ費用の比較

3 章で求めた α パーセンタイルオプション型の変額保険の保険料にあたるヘッジ費用 P_0 がボラティリティの増加と共にどのように変化するか、新井 [3] が求めた、アジアンオプション型の変額保険のヘッジ費用 P_0 と共に検証し、比較する。

3 章と同様に、株価過程 S_t、債券の価格過程 B_t が、

$$S_t = Se^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t}, \quad B_t = e^{rt}$$

に従うと仮定し、株式・債券ともに自由に売り買いできるものと考える。また、算出にかかわるパラメータを 3.3 節と同様に定義する。

3.3 節と同様に、時刻 t での保険会社側の GMAB に関わる損失に対してのヘッジ費用を P_t^1、GMDB に関わる損失に対してのヘッジ費用を P_t^2(変額保険全体のヘッジ費用 $P_t = P_t^1 + P_t^2$) とする。

$\sigma = \frac{\sqrt{2r}}{2} + \frac{\sqrt{2r}}{50}i$ として $i = 1, 2, \cdots, 75$ と変化させたときの、2 つの変額保険のヘッジ費用の差 ((アジアンオプション型) − (αパーセンタイルオプション型)) を見る。

結果は以下の図 1 の通りである。

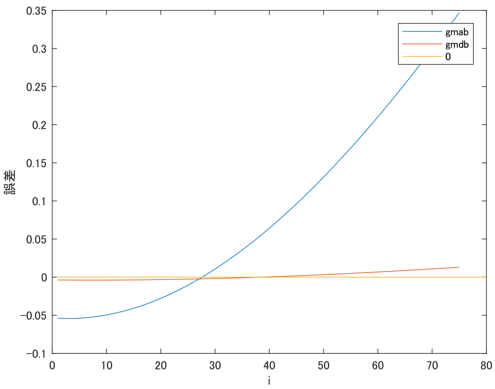

図 1: t でのアジアンオプション型のヘッジ費用と α パーセンタイルオプション型のヘッジ費用の誤差

図 1 から GMAB では $i = 28$ 程、GMDB では $i = 38$ 程で α パーセンタイルオプション型のヘッジ費用とアジアンオプション型ヘッジ費用の大小が入れ替わることがわかる。

5. 考察・結論

4 章の結果 (図 1) から α パーセンタイルオプション型のヘッジ費用はアジアンオプション型に比べ、i が小さい (ボラティリティが小さい) ところではわずかに高い結果となり、i の増加 (ボラティリティの増加) につれ、徐々に 2 つの差がなくなっていき、最終的には、α パーセンタイルオプション型のヘッジ費用がアジアンオプション型のヘッジ費用を下回ると分かる。故に、α パーセンタイルオプション型の変額保険が、今回の目的である、「ボラティリティが増加する場合におけるヘッジ費用の増加を抑える」、に合致するといえる。

また、今回はボラティリティが増加すると変額保険のリスクが増大する観点から、ボラティリティが増加する場合における変額保険のヘッジ費用の増加を抑えることを目的として研究し、これを満たすものが、今回着目した α パーセンタイルオプション型の変額保険であると結論付けた。しかしながら、変額保険という保険商品の性質上、金利の変化や (予定) 死亡率の変化等、他の様々な要因によってもリスクが変化する。これらの変化について考慮した複合的な評価も必要である。

参考文献

[1] 日本アクチュアリー会編, " 保険 1(生命保険)," 日本アクチュアリー会, 2010

[2] Dassios A., "The distribution of the quantile of a Brownian motion with drift and the pricing related path-dependent option," The Annals of Applied Probability, 5, 1995, pp386-398

[3] 新井 純平, " 確率金利モデルを導入した株式連動保険の評価", 中央大学大学院理工学研究科修士論文, 2016