多標本 Baumgartner 検定の極限分布と検出力
The limiting distribution and the power of the multisample Baumgartner test

経営システム工学専攻　宮崎 遼

1　はじめに

$\{X_{pq} \mid p=1,\ldots,k, q=1,\ldots,n_p\}$ をサンプルサイズ n_p の k 標本の観測値とする．標本間は独立とし，各標本の観測値 X_{pq} は独立で連続分布関数 F_p から得られたものとする．このとき，

$$H_0 : F_1 = F_2 = \cdots = F_k \quad \text{against} \quad H_1 : \text{not } H_0$$

という仮説について考える．$N = n_1 + \cdots + n_k$ とし，$\{X_{pq} \mid p=1,\ldots,k, q=1,\ldots,n_p\}$ を結合し，昇順に並べたときの X_{pq} の順位を R_{pq} とすると，多標本 Baumgartner 統計量 V_k は，

$$V_k = \frac{k-1}{k}\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{n_p}\sum_{q=1}^{n_p}\frac{\left(R_{pq}-\frac{N+1}{n_p+1}q\right)^2}{\frac{q}{n_p+1}\left(1-\frac{q}{n_p+1}\right)\frac{(N-n_p)(N+1)}{n_p+2}}$$

で与えられる (Murakami *et al.*, 2009)．ノンパラメトリック検定において，サンプルサイズが小さい場合，正確な棄却点を求めることができる．しかし，サンプルサイズが大きい場合は正確な棄却点を求めることが難しい．したがって，その検定統計量の極限分布を求めることが必要となる．V_k 統計量の極限分布は帰無仮説の下で重み付き χ^2_{k-1} 変数の和の分布となるため，対立仮説の下では重み付き非心 χ^2_{k-1} 変数の和の分布となる．重み付き χ^2 変数の和の分布は数値的な問題により，正確に求めることが難しい．したがって，様々な方法で近似する必要がある．Murakami *et al.* (2009) は，帰無仮説の下で saddlepoint 近似を適用することで極限分布を近似している．また，Ha (2012) は帰無仮説の下でフーリエ級数近似を適用している．本研究では，対立仮説の下でフーリエ級数近似を適用し，多標本 Baumgartner 統計量の極限分布を近似する．その過程で三角関数の部分分数展開の公式を使うことで，重み付き非心 χ^2 変数の和の分布の特性関数を無限乗積を含まない形で定式化する．そして，様々なサンプルサイズに対してシミュレーションによって棄却点を推定し，フーリエ級数近似によって推定した棄却点と比較する．また，対立仮説の下で多標本 Baumgartner 統計量の 1 次モーメントを求めることで，多標本 Baumgartner 統計量の非心パラメータを定式化する．非心パラメータを求めることで，多標本 Baumgartner 統計量の検出力を計算することができる．

2　フーリエ級数近似

$f(x)$ を周期 L で連続な実数値関数とする．このとき $f(x)$ のフーリエ級数近似は，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right\}$$

で表される．ただし，

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx,$$
$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx$$

である．

2.1　H_1 の下における V_k 統計量の特性関数

対立仮説の下で，多標本 Baumgartner 統計量 V_k の極限分布は，重み付き χ^2_{k-1} 変数の和の分布となる．したがって特性関数は，三角関数の部分分数展開の公式である

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2-(2k-1)^2} = -\frac{\pi}{4x}\tan\frac{\pi x}{2}$$

を用いることで，

$$\begin{aligned}
&\phi^*_{V_k}(u,\delta) \\
&\quad = \prod_{j=1}^{\infty}\exp\left(\frac{\frac{\delta \mathcal{I} u}{j(j+1)}}{1-\frac{2\mathcal{I}u}{j(j+1)}}\right)\left(1-\frac{2\mathcal{I}u}{j(j+1)}\right)^{-\frac{k-1}{2}} \\
&\quad = \exp\left(\frac{\delta}{2}+\frac{\pi\delta\mathcal{I}u\tan(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+8\mathcal{I}u})}{\sqrt{1+8\mathcal{I}u}}\right) \\
&\qquad \times\left(\frac{-2\pi\mathcal{I}u}{\cos(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+8\mathcal{I}u})}\right)^{\frac{k-1}{2}} \qquad (1)
\end{aligned}$$

と表すことができる．ただし，$\delta \geq 0$ は非心パラメータである．また，$\delta = 0$ のとき，(1) 式は帰無仮説の下における極限分布となる．

2.2 H_1 の下における V_k 統計量の極限分布

重み付き非心 χ^2_{k-1} 変数の和の分布を正確に求めることは，数値的な問題により難しいことが知られている．積率母関数が明確に与えられていたとしても，そのフーリエ逆変換ができないため，確率密度関数や累積分布関数を求めることができない (Tanaka, 1996)．フーリエ級数近似を適用するために，対立仮説の下における V_k 統計量の極限分布の確率密度関数 f_{V_k} を変形する．まず，V_k 統計量の対立仮説の下におけるラプラス変換は，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^*_k(t;\delta) &= \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{-tV_k}\right] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx} f_{V_k}(x)dx \\ &= \exp\left(\frac{\delta}{2} - \frac{\pi t\delta\tan(\frac{\pi}{2}\sqrt{1-8t})}{\sqrt{1-8t}}\right) \\ &\qquad \times \left(\frac{2\pi t}{\cos(\frac{\pi}{2}\sqrt{1-8t})}\right)^{\frac{k-1}{2}}\end{aligned}$$

である．ラプラス逆変換より

$$f_{V_k}(t) = \frac{1}{2\pi\mathcal{I}}\int_{\nu-\mathcal{I}\infty}^{\nu+\mathcal{I}\infty} \mathrm{e}^{st}\mathcal{L}^*_k(s;\delta)ds$$

を得る．ここで，$s = \nu + \mathcal{I}u, u \in \mathbb{R}$ とおき，f_{V_k} が実数値関数であることに注意すると，

$$\begin{aligned}f_{V_k}(t) = \frac{\mathrm{e}^{\nu t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}&\{\mathrm{Re}[\mathcal{L}^*_k(\nu+\mathcal{I}u;\delta)]\cos(ut) \\ &- \mathrm{Im}[\mathcal{L}^*_k(\nu+\mathcal{I}u;\delta)]\sin(ut)\}du\end{aligned}$$

と変形できる．フーリエ級数法はポアソン和で置き換えられ，離散化誤差は台形則と結びついている．$u = j\pi/T$ として，積分記号を離散区間 π/T の無限級数に置き換えると，

$$\begin{aligned}f_{V_k}(t) \approx \frac{\mathrm{e}^{\nu t}}{2T}\sum_{j=-\infty}^{\infty}&\left\{\mathrm{Re}\left[\mathcal{L}^*_k(\nu+\mathcal{I}\frac{j\pi}{T};\delta)\right]\cos\left(\frac{j\pi}{T}t\right)\right. \\ &\left.- \mathrm{Im}\left[\mathcal{L}^*_k(\nu+\mathcal{I}\frac{j\pi}{T};\delta)\right]\sin\left(\frac{j\pi}{T}t\right)\right\}\end{aligned}$$

となる．ここで，フーリエ級数近似を適用すると，

$$\begin{aligned}a_n &= 2\mathrm{Re}\left[\mathcal{L}^*_k\left(\nu+\frac{n\pi\mathcal{I}}{T};\delta\right)\right], \\ b_n &= -2\mathrm{Im}\left[\mathcal{L}^*_k\left(\nu+\frac{n\pi\mathcal{I}}{T};\delta\right)\right]\end{aligned}$$

を得る．よって，対立仮説の下におけるフーリエ級数近似に基づく V_k 統計量の極限分布の確率密度関数は，

$$\begin{aligned}f_{V_k}(t;\nu,T,M,\delta) \approx \frac{\mathrm{e}^{\nu t}}{T}&\left[\frac{1}{2}\mathcal{L}^*_k(\nu;\delta)\right. \\ &+ \sum_{n=1}^{M}\left\{\mathrm{Re}\left[\mathcal{L}^*_k\left(\nu+\frac{n\pi\mathcal{I}}{T};\delta\right)\right]\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\right. \\ &\left.\left.- \mathrm{Im}\left[\mathcal{L}^*_k\left(\nu+\frac{n\pi\mathcal{I}}{T};\delta\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\right\}\right]\end{aligned}$$

となる．ただし，$\nu, T, M > 0$ である．また，$\delta = 0$ のとき，f_{V_k} は帰無仮説の下における V_k 統計量の極限分布の確率密度関数となる．

3 多標本 Baumgartner 検定の検出力

3.1 V_k 統計量の棄却点

この章では，対立仮説の下で多標本 Baumgartner 検定の確率について調べる．本研究では，Ha (2012) の設定と同様に $T = 50$，$\nu = 0.01$ とし，$M = 1000$ とする．表 1 は，$\delta = 0$，すなわち帰無仮説の下における V_k 統計量の推定棄却点である．$k = 3$ に対しては，Murakami *et al.* (2009) で多標本 Baumgartner 検定の極限分布として

$$\begin{aligned}\Psi_3 &:= \mathrm{P}(V_3 \le b) \\ &= 2\sqrt{\frac{2\pi^3}{b^3}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(2j+1)\exp\left(\frac{b}{8} - \frac{(2j+1)^2\pi^2}{2b}\right)\end{aligned}$$

が導出されている．Ψ_3 には無限級数が含まれているため，$j = 0, \ldots, 100,000$ として V_3 統計量の極限分布を近似する．$k = 3$ では，Murakami *et al.* (2009) で示されている saddlepoint 近似による棄却点よりも精度が高くなっている．また，saddlepoint 近似は saddlepoint の選択が Newton-Raphson 法の初期値に依存し，その初期値の選択が容易ではない．しかし，フーリエ級数近似は初期値に依存することなく，プログラムも容易である．

表 1: 帰無仮説の下での V_k 統計量の推定棄却点

k	Nominal level 0.100	0.050	0.025	0.01
Ψ_3	3.399337	4.093881	4.787376	5.703764
3	3.399337	4.093881	4.787376	5.703764
5	6.020764	6.887264	7.723292	8.797513
7	8.482157	9.476057	10.419480	11.614691
9	10.865565	11.965714	12.999355	14.296984

次に，サンプルサイズの違いでどのように V_k 統計量の棄却点が変化するのかシミュレーションによって調べる．表 2 から表 4 は各サンプルサイズで検定した場合の V_k 統計量の推定棄却点である．シミュレーション回数は 1,000,000 回とする．また，フーリエ級数近似によって推定された棄却点を使用した場合の type I error rate も併記する．

表 2: シミュレーションによる推定棄却点 ($k = 3$)

	Nominal level			
n_i	0.100	0.050	0.025	0.010
10	3.580	4.402	5.222	6.338
	(0.1166)	(0.0647)	(0.0362)	(0.0169)
20	3.533	4.325	5.126	6.203
	(0.1124)	(0.0612)	(0.0334)	(0.0152)
50	3.472	4.213	4.951	5.965
	(0.1070)	(0.0558)	(0.0292)	(0.0127)
100	3.438	4.163	4.888	5.845
	(0.1039)	(0.0534)	(0.0276)	(0.0114)
200	3.426	4.133	4.851	5.794
	(0.1026)	(0.0519)	(0.0266)	(0.0109)
500	3.410	4.111	4.815	5.740
	(0.1010)	(0.0509)	(0.0257)	(0.0103)
1000	3.402	4.103	4.799	5.719
	(0.1002)	(0.0505)	(0.0253)	(0.0102)
F.S.A.	3.399	4.094	4.787	5.704

表 3: シミュレーションによる推定棄却点 ($k = 5$)

	Nominal level			
n_i	0.100	0.050	0.025	0.010
10	6.301	7.336	8.342	9.630
	(0.1200)	(0.0677)	(0.0383)	(0.0181)
20	6.230	7.220	8.189	9.484
	(0.1153)	(0.0634)	(0.0349)	(0.0164)
50	6.137	7.073	7.988	9.176
	(0.1088)	(0.0573)	(0.0305)	(0.0134)
100	6.083	6.986	7.859	9.003
	(0.1048)	(0.0540)	(0.0279)	(0.0118)
200	6.055	6.938	7.796	8.885
	(0.1026)	(0.0521)	(0.0266)	(0.0107)
500	6.037	6.919	7.766	8.849
	(0.1012)	(0.0513)	(0.0259)	(0.0105)
1000	6.030	6.898	7.737	8.818
	(0.1007)	(0.0504)	(0.0253)	(0.0101)
F.S.A.	6.021	6.887	7.723	8.798

表 4: シミュレーションによる推定棄却点 ($k = 7$)

	Nominal level			
n_i	0.100	0.050	0.025	0.010
10	8.827	10.013	11.147	12.576
	(0.1215)	(0.0688)	(0.0392)	(0.0186)
20	8.749	9.898	10.997	12.424
	(0.1171)	(0.0649)	(0.0360)	(0.0169)
50	8.632	9.703	10.732	12.043
	(0.1098)	(0.0582)	(0.0308)	(0.0135)
100	8.569	9.608	10.587	11.842
	(0.1058)	(0.0547)	(0.0283)	(0.0118)
200	8.526	9.539	10.504	11.729
	(0.1030)	(0.0522)	(0.0266)	(0.0109)
500	8.507	9.512	10.460	11.671
	(0.1016)	(0.0513)	(0.0257)	(0.0105)
1000	8.491	9.496	10.452	11.642
	(0.1006)	(0.0507)	(0.0256)	(0.0102)
F.S.A.	8.482	9.476	10.419	11.615

3.2 V_k 統計量の非心パラメータ

次に，V_k 統計量の検出力と非心パラメータについて考察する．表 5 は，有意水準を 5% としたときの検出力に対する非心パラメータである．表 1 と同様に，$T = 50$，$M = 1000$，$\nu = 0.01$ として計算する．例えば，$\mathbb{P}(V_3 < 4.093881) = 0.8$ のとき，非心パラメータの値は $\delta = 4.170449$ となる．

表 5: 検出力に対する V_k 統計量の非心パラメータ

	$\alpha = 0.05$ for samples k			
Power	3	5	7	9
0.1	0.417143	0.585468	0.712658	0.819188
0.2	1.040195	1.414932	1.695895	1.930733
0.3	1.553605	2.079389	2.472119	2.799966
0.4	2.026685	2.683694	3.173085	3.581178
0.5	2.492971	3.274842	3.855841	4.339803
0.6	2.979183	3.888311	4.562330	5.123145
0.7	3.518315	4.566430	5.341685	5.985363
0.8	4.170449	5.385072	6.281194	7.024804
0.9	5.106113	6.558546	7.626697	8.511310

表 5 から，検出力によって，非心パラメータ δ がどのように変化するかがわかる．しかし，非心パラメー

タに分布の情報がどのように含まれているかわからない．そこで，V_k 統計量の非心パラメータを定式化する．

$$C_1(p) = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{(n_p+1)(n_p+2)}{n_p(N-n_p)(N+1)}, \mathrm{HN}[n_p] = \sum_{q=1}^{n_p} \frac{1}{q}$$

とおくと，非心パラメータ δ は

$$\begin{aligned}
\delta &= \mathrm{E}(V_k) - k + 1 \\
&= \sum_{p=1}^{k} C_1(p) \left\{ \sum_{q=1}^{n_p} \mathrm{E}\left[\frac{R_{pq}^2}{q}\right] + \sum_{q=1}^{n_p} \mathrm{E}\left[\frac{R_{pq}^2}{n_p+1-q}\right] \right. \\
&\quad - 2\left(\frac{N+1}{n_p+1}\right) \sum_{q=1}^{n_p} \mathrm{E}[R_{pq}] \\
&\quad - 2\left(\frac{N+1}{n_p+1}\right) \sum_{q=1}^{n_p} \mathrm{E}\left[\frac{qR_{pq}}{n_p+1-q}\right] \\
&\quad \left. +(N+1)^2 \left(\mathrm{HN}[n_p] - \frac{n_p}{n_p+1}\right) \right\} - k + 1
\end{aligned}$$

と表すことができる．ここで順位 R_{pq} を含む項を計算すると，

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=1}^{n_p} \mathrm{E}[R_{pq}] \\
&\quad = \sum_{s\neq p}^{k} n_s n_p \int F_s dF_p + \frac{1}{2} n_p(n_p+1), \\
&\sum_{q=1}^{n_p} \mathrm{E}\left[\frac{qR_{pq}}{n_p+1-q}\right] \\
&\quad = \sum_{s\neq p}^{k} n_s n_p \int \frac{F_s F_p}{1-F_p} \left(1 - F_p^{n_p-1}\right) dF_p \\
&\qquad + \sum_{s\neq p}^{k} n_s \int \frac{F_s}{1-F_p} \left(1 - F_p^{n_p}\right) dF_p \\
&\qquad + (n_p+1)^2 \mathrm{HN}[n_p] - \frac{3}{2} n_p(n_p+1), \\
&\sum_{q=1}^{n_p} \mathrm{E}\left[\frac{R_{pq}^2}{q}\right] \\
&\quad = \frac{1}{2} n_p(n_p+1) + 2\sum_{s\neq p}^{k} n_s n_p \int F_s dF_p \\
&\qquad + \sum_{s\neq p}^{k} n_s \int \frac{F_s}{F_p} \left\{1 - (1-F_p)^{n_p}\right\} dF_p \\
&\qquad + \sum_{s\neq p}^{k} n_s(n_s-1) \int \frac{F_s^2}{F_p} \left\{1 - (1-F_p)^{n_p}\right\} dF_p \\
&\qquad + \sum_{s\neq p}^{k} \sum_{w\neq s}^{k} n_s n_w \int \frac{F_s F_w}{F_p} \left\{1 - (1-F_p)^{n_p}\right\} dF_p, \\
&\sum_{q=1}^{n_p} \mathrm{E}\left[\frac{R_{pq}^2}{n_p+1-q}\right] \\
&\quad = (n_p+1)^2 \mathrm{HN}[n_p] - \frac{3}{2} n_p(n_p+1) \\
&\qquad + 2\sum_{s\neq p}^{k} n_s n_p \int \frac{F_s F_p}{1-F_p} \left(1 - F_p^{n_p-1}\right) dF_p \\
&\qquad + 3\sum_{s\neq p}^{k} n_s \int \frac{F_s}{1-F_p} \left(1 - F_p^{n_p}\right) dF_p \\
&\qquad + \sum_{s\neq p}^{k} \sum_{w\neq s}^{k} n_s n_w \int \frac{F_s F_w}{1-F_p} \left(1 - F_p^{n_p}\right) dF_p \\
&\qquad + \sum_{s\neq p}^{k} n_s(n_s-1) \int \frac{F_s^2}{1-F_p} \left(1 - F_p^{n_p}\right) dF_p
\end{aligned}$$

となる．

4　まとめ

本研究では，フーリエ級数近似を使い，対立仮説の下で多標本 Baumgartner 検定の極限分布を近似した．その導出過程で，三角関数の部分分数展開を使い，対立仮説の下で多標本 Baumgartner 統計量の特性関数を定式化した．フーリエ級数近似はプログラムが容易であり，3 標本のときは，saddlepoint 近似よりも精度が高くなった．また，多標本 Baumgartner 統計量の非心パラメータを定式化するために，対立仮説の下で多標本 Baumgartner 統計量の 1 次モーメントを導出した．それに加え，様々な漸近検出力に対して，多標本 Baumgartner 統計量の非心パラメータを推定した．また，サンプルサイズの違いで棄却点がどのように変化するのかシミュレーションによって推定した．

参考文献

Ha, H. T. (2012). Fourier Series Approximation for the Generalized Baumgartner Statistic. *Communications of the Korean Statistical Society* **19**(3), 451–457.

Murakami, H., Kamakura, T., and Taniguchi, M. (2009). A saddlepoint approximation to the limiting distribution of a k-sample Baumgartner statistic. *Journal of the Japanese Statistical Society* **39**(2), 133–141.

Tanaka K (1996). *Time series analysis: nonstationary and noninvertible distribution theory.* Wiley, New York.