接触 Heegaard 図式と Thurston-Bennequin 不変量について

On contact Heegaard diagrams and the Thurston-Bennequin invariant

数学専攻　草薙　亜后
Ami Kusanagi

1　準備

接触形式 α は $\alpha \wedge d\alpha > 0$ を満たすものとする．

定義 1.1. X を任意の接触多様体 $(M, \xi = \ker \alpha)$ 上のベクトル場とし，X の局所的な流れを ψ_t とする．ψ_t が定義される任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\psi_t^* \alpha = \mu \alpha$ を満たすとき X を**接触ベクトル場**と呼ぶ．ただし，$\mu : M \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする．

定義 1.2. 3 次元接触多様体 (M, ξ) に固有に埋め込まれた向き付け可能な曲面 S が**凸**であるとは，S に横断的な接触ベクトル場が存在するときをいう．

定義 1.3. S を凸曲面とし，X を S に横断的な接触ベクトル場とする．このとき，

$$\Gamma_S = \{p \in S \mid X_p \in \xi_p\}$$

を**分割集合 (dividing set)** という．

定義 1.4. **特性葉層** S_ξ とは，ξ が S 上に誘導する特異葉層のことで，Ω を S 上の面積要素，α を S 上に制限した 1 次微分形式を $\alpha|_S$ とするとき，

$$i_V \Omega = \alpha|_S$$

を満たす S 上のベクトル場 V によって表される．

定義 1.5. 閉曲面 S 上の 1 次元特異葉層構造を $\mathfrak{F}$ とする．埋め込まれた円の集合 Γ が $\mathfrak{F}$ を**分割（divid）**しているとは，次を満たすときをいう．

(i) Γ は $\mathfrak{F}$ に横断的である．特に $\mathfrak{F}$ の特異点を通らない．

(ii) S 上の面積要素を Ω とすると，$\mathfrak{F}$ を定めるベクトル場 V は次を満たしている．

- $S \setminus \Gamma$ 上で $\mathcal{L}_V \Omega \neq 0$
- $S_\pm := \{p \in S \mid \pm \mathrm{div}_\Omega(V_p) > 0\}$ によって $S \setminus \Gamma = S_+ \cup S_-$ と表せる．

定理 1.6. 向き付け可能な閉曲面 S が凸曲面であるためには特性葉層 S_ξ が分割集合 Γ によって分割されていることが必要十分である．

2　接触 Heegaard 図式と凸 Heegaard 曲面上のルジャンドル結び目

定義 2.1. M を向き付け可能な 3 次元多様体とする．$M = V_1 \cup V_2$ が M の **Heegaard 分解**であるとは，V_1, V_2 は種数 n のハンドル体で，$V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$ であるときをいう．また，曲面 $\partial V_1 = \partial V_2$ を **Heegaard 曲面**という．

定義 2.2. 種数 n のハンドル体 V_1 の**メリディアンシステム**とは，以下を満たす互いに交わらない境界線上の n 個の曲線 $\{m_1, \cdots, m_n\}$ のことをいう．

(i) m_i は互いに交わらない固有の円板 d_i の境界

(ii) $\overline{V_1 \setminus \bigcup_{i=1}^n N(d_i)} \cong B^3$

Heegaard 曲面が凸であるような Heegaard 分解を**接触 Heegaard 分解**と呼ぶ．接触多様体における結び目に対して，この結び目が Heegaard 曲面上にあるように，常に接触 Heegaard 分解を見つけることができる（[3] の補題 4.23 参照）．

(M,ξ) を閉 3 次元接触多様体とし，$M = V_1 \cup V_2$ を接触 Heegaard 分解とする．V_2 のメリディアンシステムを $\{g_1^*,\ldots,g_n^*\}$ とする．g_i，$g_i^*(i=1,2,\ldots,n)$ を $H_1(\partial V_2;\mathbb{Z})$ の生成元とし，g_i は $g_i \bullet g_j^* = \delta_{ij}$ ，$g_i \bullet g_j = 0$ を満たすとする．ただし，δ_{ij} はクロネッカーのデルタで，$\bullet$ は交差積を表す．さらに，V_1 のメリディアンシステムを $\{c_1,\ldots,c_n\}$ とし，K と c_i の向きを固定し，∂V_2 上の $\{c_1,\ldots,c_n\}$ を $\{c_1',\ldots,c_n'\}$ する．ここでは，$(V_2,\{c_1',\ldots,c_n';g_1^*,\ldots,g_n^*\})$ を Heegaard 分解 $M = V_1 \cup V_2$ の **Heegaard 図式**と呼ぶことにする．K を $\partial V_1 = \partial V_2$ 上のホモロジー自明ルジャンドル結び目（null-homologous Legendrian knot）とし，分割集合 Γ と K の交点数を $|K \cap \Gamma|$ と書く．

$$H_1(M;\mathbb{Z}) = \langle g_1,\ldots,g_n \mid c_1',\ldots,c_n' \rangle$$

M において K がホモロジー自明であるとき，K は M の 1 チェインとして c_i' のある線型結合 $\sum_{i=1}^n E_i c_i'$（E_i は整数）とホモローガスである．

定義 2.3. K と K' を向き付け可能な 3 次元多様体 M の互いに交わらない向きのついたホモロジー自明結び目とし，Σ' を K' に関する Seifert 曲面とする．このとき，K と K' の**絡み数**は次のように定義される．

$$\mathrm{lk}(K,K') = K \bullet \Sigma'$$

ただし，$\bullet$ は交差積とする．

定義 2.4. K の **Thurston-Bennequin 不変量**とは，K の曲面枠付けに関する接触枠付けのねじれ数で定義され，$\mathrm{tb}(K)$ と書く． これは ξ に横断的かつ正方向にわずかにスライドさせた K に平行な曲線 K' と K の絡み数に等しい．ただし，K' の向きは K と同じ向きとする．

$$\mathrm{tb}(K) = \mathrm{lk}(K,K')$$

定理 2.5. 凸 Heegaard 曲面上にある分割集合を Γ，ホモロジー自明ルジャンドル結び目を K とする．このとき，Thurston-Bennequin 不変量は次のように計算される（[4] 定理 2.1）．

$$\mathrm{tb}(K) = -\frac{1}{2}|K \cap \Gamma| + \sum_{i=1}^{n} E_i \cdot (K \bullet c_i')$$

定理 2.6. K を凸曲面 S 上のルジャンドル結び目とする．このとき，S 上の K に沿った ξ のねじれ数 $tw(K,S)$ は

$$tw(K,S) = -\frac{1}{2}|K \cap \Gamma_S|$$

となる．ただし，Γ_S は S 上の分割集合とする．

計算公式

ベクトル A,I と行列 C を次のように定義する．

$$\begin{aligned} A &:= (K \bullet g_i*)_{i=1,\ldots,n} \\ I &:= (K \bullet c_i')_{i=1,\ldots,n} \\ C &:= (c_j' \bullet g_i*)_{i,j=1,\ldots,n} \end{aligned}$$

K がホモロジー自明結び目であることと，方程式 $A = CE$ が整数解を持つことは必要十分である．このとき，Thurston-Bennequin 不変量は次のように計算できる．

$$\mathrm{tb}(K) = -\frac{1}{2}|K \cap \Gamma| + \langle E, I \rangle$$

3　オープンブック分解とページ上のルジャンドル結び目

定義 3.1. M の**オープンブック分解**とは，次を満たす組 (B,π) のことである．

(i) B は M の有向絡み目でオープンブックの**バインディング（binding）**と呼ばれる.

(ii) $\pi : M \setminus B \to S^1$ はファイブレーションで $\pi^{-1}(\theta)$ はコンパクト曲面 $\Sigma_\theta \subset M$ の内部ですべての $\theta \in S^1$ に対して $\partial\Sigma_\theta = B$ となる. 曲面 $\Sigma = \Sigma_\theta$ を**ページ**と呼ぶ.

定義 3.2. **抽象オープンブック（abstract open book）**とは, 次のような組 (Σ, ϕ) のことである.

(i) Σ は境界を持つ有向コンパクト曲面.

(ii) $\phi : \Sigma \to \Sigma$ は微分同相写像で, ϕ は $\partial\Sigma$ の近傍で恒等的である. この ϕ を**モノドロミー**と呼ぶ.

定義 3.3. M 上の接触構造 ξ が M のオープンブック分解 (B, π) に**サポート**されているとは, 次のような ξ を定義する接触形式 α が存在するときをいう.

(i) 各ページ上で $d\alpha$ は面積要素である.

(ii) B 上で $\alpha > 0$.

ルジャンドル結び目がページ上にあるように接触構造をサポートするオープンブックを常に見つけることができることに注意する（[3] の補題 4.23 参照）.

ページを S とし, モノドロミーを $\phi = T_l^{\varepsilon_l} \circ \cdots \circ T_1^{\varepsilon_1}$ とし, $(S, \phi = T_l^{\varepsilon_l} \circ \cdots \circ T_1^{\varepsilon_1})$ を接触オープンブックとする. $T_k^{\varepsilon_k}$ は曲線 T_k に沿った符号 ε_k のデーンツイストを表す. 1 次元相対ホモロジー群の基底を代表する固有な弧 a_i $(i = 1, \dots, n)$ を選ぶ. S 上での交差積を用いて行列 $\overline{C}$ を定義する.

$$\overline{c_{ij}} = \sum_{m=1}^{l} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_m \le l} \varepsilon_{k_1} \cdots \varepsilon_{k_m} (T_{k_m} \bullet T_{k_{m-1}}) \cdots (T_{k_2} \bullet T_{k_1})(T_{k_1} \bullet a_j)(T_{k_m} \bullet a_i)$$

定理 3.4. K を S 上のルジャンドル結び目とし, $A := (K \bullet a_i)_{i=1,\dots,n}$ とするとき, 次が成り立つ（[4] 定理 3.1）.

(i) K がホモロジー自明であることと, E に関する方程式 $A = \overline{C}\, E$ が整数解を持つことは同値である.

(ii) K はホモロジー自明であるとき, Thurston-Bennequin 不変量は

$$\mathrm{tb}(K) = -\langle E, A \rangle$$

4　有理係数ホモロジー自明結び目

定理 4.1. 凸 Heegaard 曲面上にある分割集合を Γ, 位数 d の有理係数ホモロジー自明なルジャンドル結び目を K とする. このとき, 有理 Thurston-Bennequin 不変量は次のように計算される.（[4] 定理 5.4）

$$\mathrm{tb}(K) = -\frac{1}{2}|K \cap \Gamma| + \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n} E_i \cdot (K \bullet c_i')$$

定理 4.2. K を S 上のルジャンドル結び目とし, $A := (K \bullet a_i)_{i=1,\dots,n}$ とするとき, 次が成り立つ.（[4] 定理 5.5）

(i) K が位数 d の有理係数ホモロジー自明であることと, E に関する $d\,A = \overline{C}\, E$ が整数解を持ち, d は解を持つための最小の自然数であることと同値である.

(ii) K は位数 d の有理係数ホモロジー自明であるとき, 有理 Thurston-Bennequin 不変量は

$$\mathrm{tb}_{\mathbb{Q}}(K) = -\frac{1}{d}\langle E, A \rangle$$

5　計算例

例 5.1. $((r, \varphi), \theta) \in D^2 \times S^1$ とする. $\alpha = d\theta + r^2\, d\varphi$ とすると, α は接触形式である.
$V = \{((r, \varphi), \theta) \in D^2 \times S^1 \mid 0 < r \le c\ ,\ ^\forall c \in \mathbb{R}_{>0}\}$ とすると, ベクトル場 $X = -c^2\,\partial\varphi + \partial\theta$ は V 上の特性葉層を定める. しかし, ∂V は凸曲面ではない. ここで, $V' = \{((r, \varphi), \theta) \in D^2 \times S^1 \mid 0 < r \le c - \varepsilon \sin(c^2\varphi + \theta)\}$ とする. ただし, c は $c^2 \in \mathbb{N}$ を満たす定数で, ε は十分小さい正の実数であるものとする. ベクトル場 $X' = -(c - \varepsilon\sin(c^2\varphi + \theta))^2\partial\theta + \partial\varphi$ は V' 上に特性葉層を定め, $\mathrm{div}_\Omega(X') = 2\varepsilon(c - \varepsilon\sin(c^2\varphi + \theta))\cos(c^2\varphi + \theta)$ より, 分割集合 Γ は特性葉層を分割する. したがって, $\partial V'$ は凸曲面である.

$(V_1, \xi_1 = \ker\alpha_1)$, $(V_2, \xi_2 = \ker\alpha_2)$ を $r = 1$ で固定した $(V, \xi = \ker\alpha)$ のコピーとする. この 2 つを貼り合わせたときに V を V' のようにする。このとき, $L(1, q)$ における凸 Heegaard 曲面上の K の Thurston-Bennequin 不変量を求める.

$L(1,q) \cong L(1,0)$ であるので $L(1,0)$ で計算する．このとき，∂V_1 上のルジャンドル結び目 $K = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は，∂V_2 上では $K = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ と描ける．

$$\begin{aligned} A &= K \bullet g^* = -1 \\ C &= c' \bullet g^* = -1 \\ I &= K \bullet c' = -1 \end{aligned}$$

$A = CE$ より $E = 1$ ．K は分割集合 Γ と交わらないので $\mathrm{tb}(K) = -1$ である．

例 5.2. $((r,\varphi),\theta) \in D^2 \times S_1$ とすると，$\alpha = \cos(\varphi+\theta)\,dr - r\sin(\varphi+\theta)\,d\varphi$ は接触形式である．

$X = r\,\partial r$ は接触ベクトル場であり，$r = 1$ に固定した曲面 $\partial V = \partial(D^2 \times S^1)$ は凸曲面である．分割集合 Γ_S は $\theta = -\varphi + \frac{\pi}{2}$ と $\theta = -\varphi + \frac{3}{2}\pi$ である．$(V_1, \xi_1 = \ker\alpha_1)$，$(V_2, \xi_2 = \ker\alpha_2)$ を $(V, \xi = \ker\alpha)$ のコピーとし，この 2 つを接触枠付けで貼り合わせてレンズ空間 $L(p,q)$ における新しい接触構造を得る．そのための条件を求める．

$$\begin{array}{rcccc} L(p,q) & = & V_1 & \cup & V_2 \\ & & \mu_1 & \longmapsto & p\lambda_2 + q\mu_2 \\ & & \lambda_1 & \longmapsto & j\lambda_2 + k\mu_2 \end{array}$$

$j, p \in \mathbb{Z}$ は $jq - pk = -1$ を満たす．V_1, V_2 の中心曲線（θ 軸）の接触枠付けをそれぞれ $(\lambda_c)_1, (\lambda_c)_2$ とする．$(\lambda_c)_1$ は ∂V_2 では $(\lambda_c)_1 = (k-q)\mu_2 + (j-p)\lambda_2$ と書け，$(\lambda_c)_2$ に貼り付ける．この貼り合わせでは $L(p, -p-1)$ が得られ，∂V_1 上のルジャンドル結び目 $K = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，$K' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ は，∂V_2 では $K = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，$K' = \begin{bmatrix} 1+p \\ -p-2 \end{bmatrix}$ と描ける．
それぞれの Thurston-Bennequin 不変量を求める．
(i) K は分割集合 Γ と交わらない．

$$\begin{aligned} A &= K \bullet g^* = -1 \\ C &= c' \bullet g^* = -p \\ I &= K \bullet c' = 1 \end{aligned}$$

$pA = CE$ より $E = 1$ ．したがって $\mathrm{tb}_{\mathbb{Q}}(K) = \frac{1}{p}$ である．
(ii) K' は分割集合 Γ と 2 回交わる．

$$\begin{aligned} A &= K' \bullet g^* = -1-p \\ C &= c' \bullet g^* = -p \\ I &= K' \bullet c' = 1 \end{aligned}$$

$pA = CE$ より $E = 1 + p$ ．したがって $\mathrm{tb}_{\mathbb{Q}}(K) = \frac{1}{p}$ である．

参考文献

[1] H. Geiges，*An Introduction to Contact Topology*，Cambridge University Press, 2008.

[2] J. B. Etnyre, Legendrian and transverse knots, in : *Handbook of Knot Theory* (W. Menasco and M. Thistlethwaite, eds.), Elsevier, Amsterdam (2005), 105-185.

[3] J. B. Etnyre, *Lectures on open book decompositions and contact structures*, arXiv:math/0409402.

[4] S. Durst, M. Kegel, M. Klukas, *Computing the Thurston-Bennequin invariant in open books*, Acta Math.Hungar, **150** (2016), 441-455.

[5] 三松 佳彦，3 次元接触構造のトポロジー，数学メモアール第 1 巻 ，日本数学会 (2001)