実空間型内の超曲面
Hypersurfaces of a real space form

Hiroaki Sato

Department of Mathematics Chuo University

1. Preliminaries

$\tilde{M}^{n+1}(\tilde{c})$ を定曲率 $\tilde{c}$ をもつ $n+1$ 次元実空間型とする.
(すなわち $\tilde{M}^{n+1}(\tilde{c})$ は定断面曲率は $\tilde{c}$ を持つ完備, 単連結リーマン多様体とする.)
各実数 $\tilde{c}$ と各整数 $n > 1$ に対して定曲率 $\tilde{c}$ をもつ等長変換を除いて一つの n 次元実空間型が存在する.
実空間型は
(1) $\tilde{c} = 0$ のとき, $\tilde{M}^{n+1}(\tilde{c})$ はユークリッド空間 $E^{n+1}(\tilde{c})$.
(2) $\tilde{c} < 0$ のとき, $\tilde{M}^{n+1}(\tilde{c})$ は双曲空間 $H^{n+1}(\tilde{c})$.
(3) $\tilde{c} > 0$ のとき, $\tilde{M}^{n+1}(\tilde{c})$ は球面 $S^{n+1}(\tilde{c})$.

f を $\tilde{M}^{n+1}(\tilde{c})$ 内の n 次元リーマン多様体 M^n の等長はめ込みとする. そのような M^n を超曲面と呼ぶ. A を対称作用素とし, ∇ を M^n 上, $\tilde{\nabla}$ を $\tilde{M}^{n+1}$ 上の共変微分とする.
すると, 以下の公式が成り立つ.

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX, Y)\xi$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -AX$$

また, Gauss の方程式, Codazzi の方程式は次で与えられる.
ここで, R を M^n の曲率テンソルとする.

$$R(X,Y) = \tilde{c}(X \wedge Y) + AX \wedge AY, \qquad X, Y \in T_x(M)$$

$$(\nabla_X A)(Y) = (\nabla_Y A)(X)$$

次に, M^n の曲率テンソル R が

$$\nabla R = 0$$

を満たすならば, M^n は局所対称空間と呼ばれる.
例えば定曲率を持つ二つの空間の積は局所対称空間である. 今,

$$\nabla R = 0$$

ならば, 任意の接ベクトル X と Y に対して,

$$R(X,Y) \cdot R = 0$$

である. 逆に,

$$R(X,Y)\cdot R=0$$

という弱い条件下で M^n は $\nabla R=0$ かどうかという問題が考えられる.

2. Known Result

Theorem (Nomizu) M を n 次元完備, 連結リーマン多様体とする. $(n>2)$
等長はめ込み $f:M^n\to R^{n+1}$
$\mathrm{rank}A=k\geq 3$, $R(X,Y)\cdot R=0$ を満たすならば,
(i)S^n
(ii)$S^k\times R^{n-k}$

Lemma 1 (Nomizu).
T_0, T_λ は *differentiable.*

Lemma 2(Nomizu).
T_0, T_λ は *involutive.*

Lemma 3(Nomizu).
(M^n) を $\tilde{M}^{n+1}$ の超曲面とする. M^n の各点で異なる二種の主曲率 $(\lambda\neq\mu)$ を持つならば, T_λ は *differentiable, involutive* である.
その時, $dimT_\lambda>1$ ならば, $X\in T_\lambda$ に対して $X\lambda=0$

Theorem(Nomizu).
(M^n,f) を $\tilde{M}^{n+1}$ 内の主曲率が *constant* である超曲面とする.
その主曲率が異なる二種ならば, (M^n) は二つの定曲率空間の積空間である.

Lemma 4(Cartan).
M^n を $\tilde{M}^{n+1}(\tilde{c})$ 内の定曲率 $\tilde{c}$ を持つ超曲面とし, $\tilde{c}\leq 0$, 主曲率が *constant* の時, 主曲率は多くて二種である.

C : Weyl curvature tensor

$$\begin{aligned}C(X,Y)Z=R(X,Y)Z-\frac{1}{n-2}\{g(SY,Z)X-g(SX,Z)Y+g(Y,Z)SX-g(X,Z)SY\}\\+\frac{\mathrm{traceS}}{(n-1)(n-2)}\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\}\end{aligned}$$

と定義する.
$C=0$ の時, 以下の Proposition が証明されている.
$C=0$ を計算すると,
$\lambda\mu=\frac{1}{n-2}(\mu\mathrm{trace}A-\mu^2+\lambda\mathrm{trace}A-\lambda^2)-\frac{(\mathrm{trace}A)^2-\mathrm{trace}A^2}{(n-1)(n-2)}$
Proposition 5 (Seiki Nishikawa and Yoshiaki Maeda).
各点で異なる主曲率は二種である.

Proposition 6 (Seiki Nishikawa and Yoshiaki Maeda).
主曲率 λ の重複度は $1, n-1$ か n である.

3.Theorem

Theorem
Let M^n be a hypersurface in $\tilde{M}^{n+1}(\tilde{c})$. Assume that $R(X,Y)\cdot C = 0$, trace A is constant and $n \geq 3$. Then M^n is parallel, i.e., locally isometric to a product of two spaces of constant curvature.

実際に, $R \cdot C = 0$ を計算していく.

$$(\tilde{c} + \lambda_i\lambda_j)(\lambda_j - \lambda_i)\{(n-2)\lambda_k - \mathrm{trace}A + (\lambda_j - \lambda_i)\} = 0$$

を得られる. はじめに, $\tilde{c} = 0$ を考える.

$$\lambda_i\lambda_j(\lambda_j - \lambda_i)\{(n-2)\lambda_k - \mathrm{trace}A + (\lambda_j - \lambda_i)\} = 0$$

(i)0 固有値を含む場合
$\lambda_k = 0$ とすると,

$$\lambda_i\lambda_j(\ \lambda_i - \lambda_j)\ (-\mathrm{trace}A + \lambda_i + \lambda_j)\ = 0$$

(ii)rank$A = n$ の場合

$$\lambda_i\lambda_j(\lambda_j - \lambda_i)\{(n-2)\lambda_k - \mathrm{trace}A + (\lambda_j - \lambda_i)\} = 0$$

三種ないことを示すと,

$$(n-1)\lambda - \mathrm{trace}A + \lambda + \mu = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda & & & & & & \\ & & & \mu & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \mu & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

次に, $\tilde{c} \neq 0$ を考える.
(i) 0 固有値を含む場合
$\lambda_i = 0$ とすると,

$$\tilde{c}\lambda_j\{(n-2)\lambda_k - \mathrm{trace}A + \lambda_j\} = 0$$

(ii)rank$A = n$ の場合

$$(\tilde{c} + \lambda\mu)(\lambda - \mu)\{(n-2)\nu - \mathrm{trace}A + \lambda + \mu\} = 0$$

主曲率が三種ないことを示すと,

$$(c+\lambda\mu)(\lambda-\mu)^2(p-n+1)=0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu \end{pmatrix} \tilde{c}+\lambda\mu=0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

References

[1] E, Catan, *Sur quelques familles remarquables d' hypersurfaces*, C. R. Cong. Math. Liege(1939),30-41; Oeuvres completes, Tome III, Vol.2, p. 1481.

[2] Seiki Nishikawa and Yoshiaki Maeda, *Comformally flat hypersurfaces in a comformally flat riemannian maniforld*, Tohoku Math. Journ.26(1974), 159-168.

[3] Katsumi Nomizu, *On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor*, Tohoku.Math.Joorn.20(1958), 46-59.

[4] Patrick J. Ryan, *Hypersurfaces with parallel ricci tensor*, Osaka J.Math.8 (1971), 251-259.

[5] Patrick J. Ryan, *Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces*, Tohoku Math. Journ.21(1969), 363-388.

[6] S. Tanno, *Hypersurfaces satisfying a certain condition on the Ricci tensor*, Tohoku Math. J 21 (1969), 297-303.