

# 開水路床の凹凸の影響により生じる水面形の解析解に関する研究

## Study on analytical solution of water surface profile caused by unevenness of open channel floor

16N3100035E 諸岡 雅樹 (河川・水文研究室)  
Masaki MOROOKA/River Engineering and Hydrology Lab.

**Key Words :** *Hydraulics, water surface profile, Discrete Fourier transform*

### 1. はじめに

国土交通省河川砂防技術基準調査編<sup>1)</sup>によると、洪水流解析に用いる計算手法では一次元不定流、準二次元不定流、二次元不定流、準三次元不定流、三次元不定流計算が用いられている。上記の中では準三次元不定流及び三次元不定流計算のみ、水の圧力を非静水圧分布として計算しているが、それ以外の計算には静水圧分布を仮定している。実際の河川では多くの場合が非静水圧の流れ場であり、例えば定在波(波状跳水)等が生じると流線の曲率から生じる鉛直加速度の影響により、静水圧分布の仮定が崩れる。そこで銭・山田<sup>2)</sup>は水路床の非均一性に起因する流線の曲率による非静水圧の効果を考慮し、波状跳水のような定在波を表現できる三階微分の不等流の基礎式を導出した。さらに、滝口・山田<sup>3)</sup>は非静水圧を考慮した三階微分の不等流の基礎式に、川幅の変化を考慮することで一般断面に適用できる基礎式を導出した。また銭・山田の理論の拡張として、非静水圧を考慮した非定常流の式を導いた。上記の既往研究では、1次元開水路を対象としている。本研究では、浅水流方程式について微小振幅波かつ静水圧仮定の下導出した水面形の解析解と、微小振幅波かつ非静水圧仮定の下導出した水面形の解析解どちらが精度良く水面形を求めることができるか把握することを目的とし、摩擦抵抗や渦粘性、渦拡散を考慮しない最もシンプルな場合の流れを考え、水深に比べて十分小さい凹凸が存在する2次元開水路流れを対象として以下に示す条件の下で解析解を求めた。

本研究では、静水圧仮定の下、摂動法により線形化した連続式および運動方程式を用いるが、この2次元の不等流の基礎式に対し適当な変換を行うことでポアソン方程式の形に変形し、水面形の解析解を導出した<sup>4)</sup>。この解析解は畳み込み積分の形をしている。

次に、3次元ポテンシャル流れかつ非静水圧仮定の下、河床凹凸に対し2次元離散フーリエ変換を行い、河床凹凸を波数成分に変換する。この、変換した波数成分を河床が $\sin \times \cos$ の形状をしている場合の3次元ラプラス方程式の基本解に組み込むことにより、水面形の解析解を導出した。さらに、得られた解析解の妥当性を検

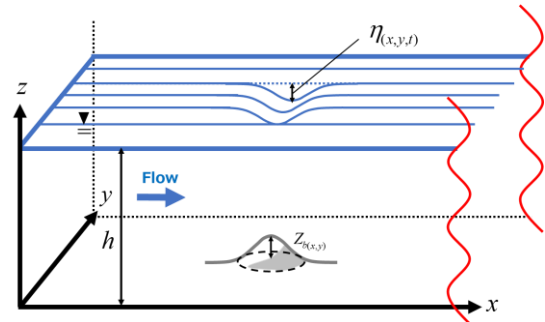


図-1 凹凸が存在する開水路流れの模式図

証するために平面2次元不定流計算及び、水理実験との比較を行い、得られた解析解の妥当性を検証した。

### 2. 河床凹凸により生じる水面形の解析解の導出

#### 2-1. 非静水圧仮定により導出した水面形の解析解

本研究で対象とする開水路流れは、水深に比べ微小な凹凸が河床に存在する流れを対象とする。模式図を図-1に示す。ここで、3次元ポテンシャル流れを仮定した際の連続式であるラプラス方程式と速度ポテンシャルを(1)式および(2)式に示す。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

$$\Phi(x, y, z) = Ux + \phi(x, y, z) \quad (2)$$

(2)式における $\phi(x, y, z)$ は河床凹凸によって生じる微小な擾乱を示す速度ポテンシャルである。この速度ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ を $x, y, z$ で微分することにより、河床凹凸により生じる微小な流速の各方向成分となる。また、(1)式および(2)式に示す3次元ポテンシャル流れに対する力学的境界条件は(3)式、運動学的境界条件は(4)式および(5)式である。水面を $z=0$ とする。

$$z=0: \quad g\eta + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} = const. \quad (3)$$

$$z=0: \quad U \frac{\partial z_b(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (4)$$

$$z=-h: \quad U \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (5)$$

$h$ は等流水深[L],  $\eta(x, y)$ は凹凸によって生じる水面の変位[L],  $Z_b(x, y)$ は凹凸の高さ[L] ( $h \gg Z_b$ ),  $U$ は流速[LT<sup>-1</sup>],  $g$ は重力加速度[LT<sup>-2</sup>], また、流れは定常とする。(5)式中の河床凹凸の高さ $Z_b(x, y)$ に対して2次元離散フーリエ変換を行うと(6)式になる。 $F(p, q)$ は河床凹凸のフーリエ変換データ,  $p$ は $x$ 方向の河床凹凸の波数,  $q$ は $y$ 方向の

河床凹凸の波数,  $m$  は  $x$  座標の格子番号,  $n$  は  $y$  座標の格子番号,  $N$  は縦, 横の格子数である. また, 逆変換の基本式を(7)式に示す.

$$F(k, l) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N Z_b(x, y) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} m p\right) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} n q\right) \quad (6)$$

$$Z_b(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N F(p, q) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} m p\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} n q\right) \quad (7)$$

以上の境界条件の下で線形化を行い(1)式を解くと, (8)式に示す速度ポテンシャル  $\Phi$  および(9)式に示す河床凹凸により生じる水面形の解析解がそれぞれ得られる.

$$\Phi = Ux - \frac{iU}{N^2} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{k \{ \cosh(\beta z) + (Fr^2 k^2 h / \beta) \sinh(\beta z) \}}{\sinh(\beta h) - (Fr^2 k^2 h / \beta) \cosh(\beta h)} F(k, l) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} m p\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} n q\right) \quad (8)$$

$$\eta(m, n) = -\frac{U^2}{gN^2} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{k^2 F(p, q)}{\sinh(\beta h) - (Fr^2 k^2 h / \beta) \cosh(\beta h)} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} m p\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} n q\right) \quad (9)$$

ここに,  $k$  は流下方向における河床凹凸の波数であり,  $l$  は幅方向における河床凹凸の波数である.  $k$  および  $l$  を以下(10), (11)式に示す. また,  $\beta$  は  $k$  と  $l$  により決まる合成波数である.  $\beta$  および上流側の凹凸により生じる擾乱の影響を受けない地点におけるフルード数  $Fr$  を以下(12), (13)式に示す.

$$k = 2\pi p / N \quad (10)$$

$$l = 2\pi q / N \quad (11)$$

$$\beta = \sqrt{k^2 + l^2} \quad (12)$$

$$Fr = U^2 / \sqrt{gh} \quad (13)$$

また, (8)式に示す速度ポテンシャル  $\Phi$  を各方向で微分することにより, 各方向流速成分を(14)~(16)式で表す.

$$u = U + \frac{U}{N^2} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{k^2 F(p, q)}{\beta} \frac{\cosh(\beta z) + (Fr^2 k^2 h / \beta) \sinh(\beta z)}{\sinh(\beta h) - (Fr^2 k^2 h / \beta) \cosh(\beta h)} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} m p\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} n q\right) \quad (14)$$

$$v = \frac{U}{N^2} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{kl F(p, q)}{\beta} \frac{\cosh(\beta z) + (Fr^2 k^2 h / \beta) \sinh(\beta z)}{\sinh(\beta h) - (Fr^2 k^2 h / \beta) \cosh(\beta h)} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} m p\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} n q\right) \quad (15)$$

$$w = -\frac{U}{N^2} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{ik F(p, q)}{\beta} \frac{\sinh(\beta z) + (Fr^2 k^2 h / \beta) \cosh(\beta z)}{\sinh(\beta h) - (Fr^2 k^2 h / \beta) \cosh(\beta h)} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} m p\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} n q\right) \quad (16)$$

## 2-2. 静水圧仮定により導出した解析解

以下では静水圧仮定の下, 摂動法により線形化した連続式及び運動方程式を用いて水面形の解析解を導出する. 連続式を(17)式, 運動方程式を(18), (19)式に示す.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(uH)}{\partial x} + \frac{\partial(vH)}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (19)$$

$$H = h + \eta - Z_b \quad (20)$$

$$u = U + u', \quad v = v' \quad (21)$$

ここに,  $u, v$  は流速の  $x, y$  方向成分である. また,  $u', v'$  はそれぞれ河床凹凸により生じる微小な速度の  $x, y$  方向成分である( $U \gg u', v'$ ).  $H$  は水位である. 以上の式に

関して線形化を行い, 定常流れ, 静水圧近似の下, 式変形を行うと(22)式になる.

$$(1 - Fr^2) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = -Fr^2 \frac{\partial^2 Z_b}{\partial x^2} \quad (22)$$

ここで, (23)式で示す元の流下方向の座標  $x$  とフルード数  $Fr$  によって決まる新たな座標系  $x_1$  を用いると(22)式は(24)式となる.  $\eta_1(x_1, y)$  は座標変換後の水面の変位である.

$$x_1 = x / \sqrt{1 - Fr^2} \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial y^2} = -Fr^2 \frac{\partial^2 Z_b}{\partial x_1^2} \quad (24)$$

(24)式はポアソン方程式の形をしており, 境界条件は隆起から無限遠で隆起によって生じる影響を受けない( $x_1, y \rightarrow \infty, \eta_1 \rightarrow 0$ )としてあるので, 2次元空間に存在する隆起による影響(応答)は, 点電荷によるポテンシャルと同じ形であると考えられる. そのため, (25)式で示す畳み込み積分を行い座標変換後の水面形  $\eta_1$  を求める.

$$\eta_1 = \frac{Fr^2}{1 - Fr^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \log \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (y - \zeta)^2} \right\} \frac{\partial^2 Z_b(\xi_1, \zeta)}{\partial \xi_1^2} d\xi_1 d\zeta \quad (25)$$

$\xi_1, \zeta$  はそれぞれ  $x_1, y$  軸方向に関する隆起の位置である. また, (26)式に示す関係から(25)式は(27)式となる.

$$\xi_1 = \xi / \sqrt{1 - Fr^2} \quad (26)$$

$$\eta_{(x,y)} = \frac{-Fr^2}{2\pi(1 - Fr^2)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 Z_b(\xi, \zeta)}{\partial \xi^2} \log \sqrt{\frac{1}{1 - Fr^2} (x - \xi)^2 + (y - \zeta)^2} d\xi d\zeta \quad (27)$$

## 3. 数値実験と水理実験(検証実験)

### 3-1. 数値実験

前章で導いた水面形の解析解である(9)式および(27)式の妥当性を検証するために静水圧仮定の下, 平面2次元不定流計算を行った. 数値計算に用いた基礎式を以下(28)~(30)式に示す.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial Z_b}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x} - g \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \quad (28)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - g \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \quad (29)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (30)$$

(28), (29)式は水深方向に平均化した浅水流の運動方程式であり, (30)式は連続式である.  $n$  はマンニングの粗度係数[L<sup>-1/3</sup>T]である. 1次精度風上差分スキームにより離散化を行い, 上記の3式を解いた.

### 3-2. 水理実験

前章で導いた水面形の解析解である(9)式および(27)式の妥当性を検証するために, 図2に示す全長8[m], 幅60[cm]の固定床開水路を用いて水路実験を行った. 実験のケースを表1に示す. ケース1及びケース2に用いた河床凹凸の形状を式(31)に示す. また, ケース3及びケース4に用いた河床凹凸の形状を式(32)に示す.

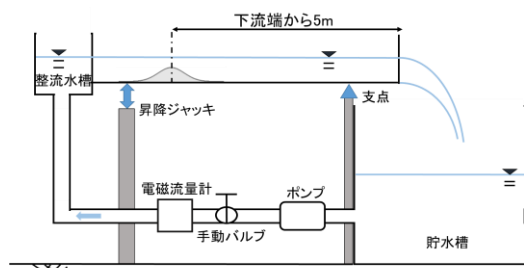


図-2 実験に用いた開水路の模式図

表-1 実験のケース

Case	流量 [L/min]	上流端Fr数	上流端水深 [cm]	河床凹凸 形状	河床凹凸 全長[cm]
Case1	1500	0.6	8.3	(31)式	80
Case2	2000	0.5	10.0	(31)式	80
Case3	1500	0.6	8.3	(32)式	60
Case4	2000	0.5	10.0	(32)式	60

$$Z_b = 2.0 \exp\left(-\frac{x^2}{300}\right) \{ \text{Unitstep}(y+3) - \text{Unitstep}(y-3) \} \quad (31)$$

$$Z_b = 1.0 \exp\left(-\frac{x^2}{300}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \quad (32)$$

ケース1及びケース2に用いた河床凹凸は、流下方向にはガウス分布の様な滑らかな変化を与え、幅方向には階段型に変化を与えた。また、ケース3及びケース4に用いた河床凹凸は、流下方向及び幅方向にガウス分布の様な滑らかな変化を与えた。河床凹凸は実験水路下流端から5[m]地点に設置し、河床凹凸の中央、中央から左側9[cm]の計2測線の水深を河床凹凸の頂点を原点として上、下流側にそれぞれ2[m]、計4[m]の区間に対してサーボ式波高計を用いて計測した。

#### 4. 結果・考察

ケース1及びケース3では、静水圧仮定の水面形と非静水圧仮定の水面形の解析解がほぼ一致し、また、実測値の傾向をよく捉えている。すなわちケース1及びケース3では静水圧仮定でも十分に水面形の再現が可能であると言える。各ケースの実測値で共通している、下流側に行くほど実測値の水深が右肩下がりになっているのは、図-2に示す実験に用いた開水路の全長が8[m]であるのに対して、下流端の段落ちによる影響が効いているためである。また、各ケースの平面2次元不定流計算結果に共通しているのは、実測値及び両解析解よりも水面形の変化が大きい点である。特に河床凹凸直上において実測値及び両解析解に対し約3倍程度の違いが見られる。これは、平面2次元不定流計算に用いた基礎式である(28)、(29)、(30)式に微小振幅波の条件を入れていないためであると考えられる。図-4、図-7、図-10、図-13では、実測値に対し移動平均をしている。これは実験の性質上生じてしまう、水面の微小な擾乱を取り除き、実測値全体の傾向を把握するために行った。各ケースで、移動平均後の実測値と両解析解に着目すると、移動平均前の実測値に比べ、より両解析解との傾向を捉えていると言える。

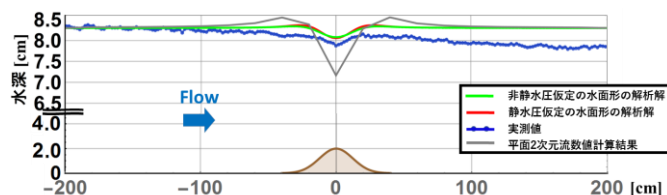


図-3 Case1 河床凹凸直上の結果と解析解の比較

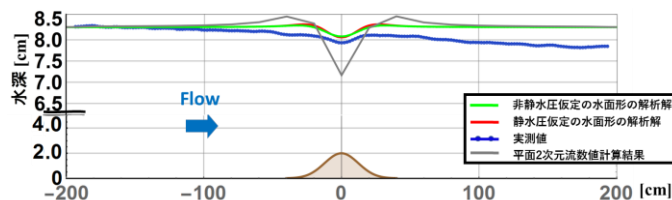


図-4 Case1 河床凹凸直上の結果と解析解の比較

（実測値に7点間移動平均）

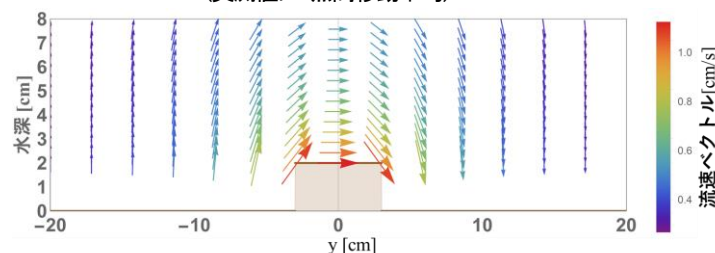


図-5 Case1 ポテンシャル理論より求めた河床凹凸周りの流速 $v_w$ ベクトル成分

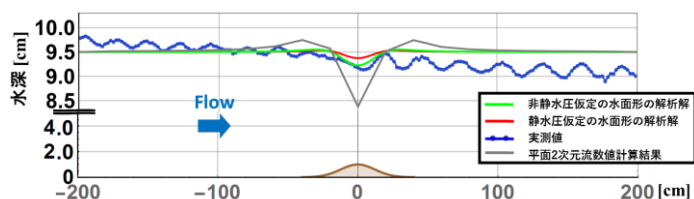


図-6 Case2 河床凹凸直上の結果と解析解の比較

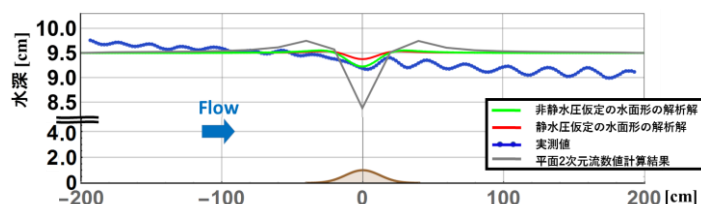


図-7 Case2 河床凹凸直上の結果と解析解の比較

（実測値に7点間移動平均）

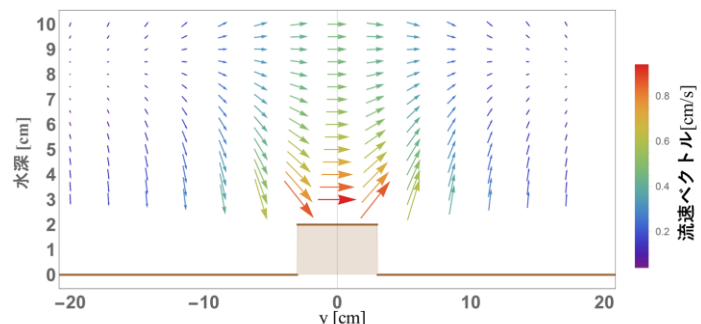


図-8 Case2 ポテンシャル理論より求めた河床凹凸周りの流速 $v_w$ ベクトル成分

ケース2及びケース4では、静水压仮定の解析解は、実測値及び非静水压仮定の解析解に比べ、水面形の変化量が小さくなっている。特にケース4でその傾向が顕著である。ケース4では、水深10[cm]に対して河床凹凸最高部が1[cm]の河床凹凸を用いて実験を行っている。このケースにおいて特に、静水压仮定の解析解では、河床凹凸の影響を十分に捉えることができなかったと言える。図-5、図-8、図-11、図-14では、各ケースにおいて(15)、(16)式より求めた河床凹凸周りの流速 $v$ 、 $w$ のベクトル成分を図示したものである。各ケースで河床凹凸周りで生じる流れの挙動を確認することができる。しかし精度の検証は行っていない。今後、3次元乱流計算を行い、その結果と比較、検証をする必要がある。

## 5. まとめ

本研究で得られた知見を以下に示す。

- ・静水压仮定及び非静水压仮定の水面形の解析解を導出し、平面2次元不定流計算及び、水理実験との比較を行い、得られた解析解の妥当性を検証した。その結果、水深8.3[cm]、フルード数0.6で行った実験ケースでは静水压仮定の水面形と非静水压仮定の水面形の解析解がほぼ一致し、また、実測値の傾向をよく捉えている。すなわち、上記の実験ケースでは静水压仮定でも十分に水面形の再現が可能であると言える。

- ・本研究で導出した非静水压仮定の水面形の解析解を用いて河床凹凸周りの流速 $v$ 、 $w$ のベクトル成分を求めることが可能である。しかし精度の検証は行っていない。今後、3次元乱流計算を行い、その結果と比較、検証を行い、その結果と比較、検証をする必要がある。

## 参考文献

- 1) 国土交通省河川砂防技術基準調査編，平成 24 年 6 月改定版
- 2) 銭潮潮，山田正：開水路断面の不均一性に起因する不等流の水面形形成に関する基礎的研究，水利科学 No. 336，65-99，2014.
- 3) 滝口浩作，山田正：非静水压を考慮した非定常流の水面形に関する研究，中央大学理工学部修士論文，2016
- 4) 山田正，日比野忠史，中津川誠：流域スケールの風の場の計算法に関する研究，土木学会論文集 No. 503/II-29，pp. 49-58，1994. 11
- 5) 河村三郎：土砂水理学 1，pp.107-157，森北出版，1982
- 6) 諸岡雅樹，山田正：開水路床に存在する単一隆起の影響によって生じる水面形に関する研究，土木学会第 71 回年次学術講演会，II-090，2016.

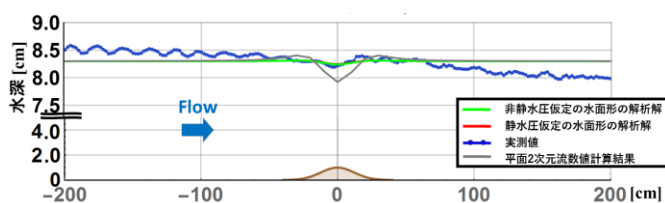


図-9 Case3 河床凹凸直上の結果と解析解の比較

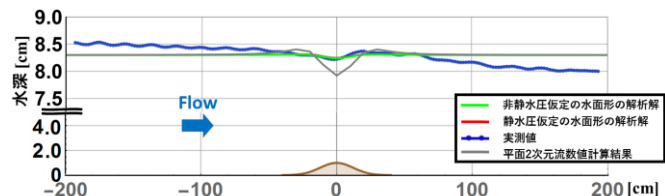


図-10 Case3 河床凹凸直上の結果と解析解の比較

(実測値に7点間移動平均)

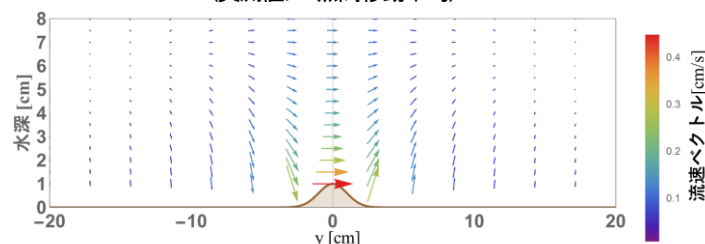


図-11 Case3 ポテンシャル理論より求めた河床凹凸周りの流速 $v$ 、 $w$ ベクトル成分

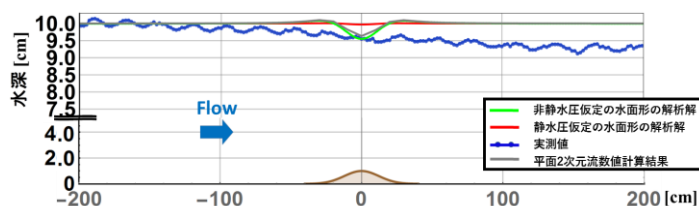


図-12 Case4 河床凹凸直上の結果と解析解の比較

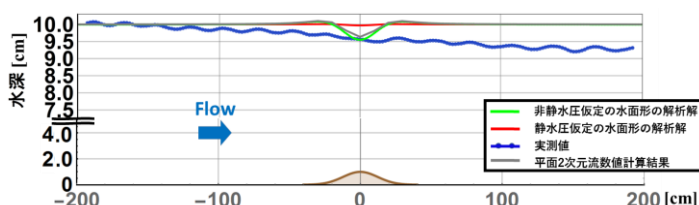


図-13 Case4 河床凹凸直上の結果と解析解の比較

(実測値に7点間移動平均)

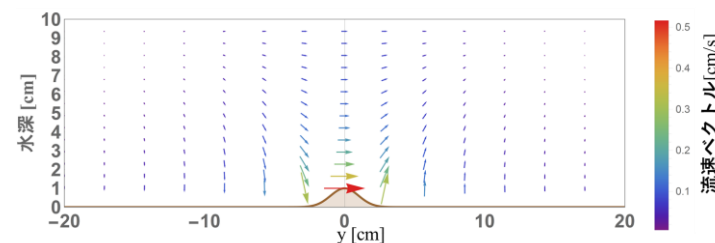


図-14 Case4 ポテンシャル理論より求めた河床凹凸周りの流速 $v$ 、 $w$ ベクトル成分