フリーラグランジュ有限要素法による剛体の着水現象の数値解析

Numerical analysis of water-impact phenomena of a rigid body by the free-Lagrange FEM

精密工学専攻　26 号　清水崇文
Takafumi SHIMIZU

1. 序論

着水現象とは物体が速度をもって水面に衝突した際，水面から衝撃を受ける現象であり，船舶のスラミングや飛行艇の着水，宇宙船の海上着水といった現象などに見られる．この着水現象によって物体が受ける衝撃圧は，時に船底を破壊し重大な海難事故を引き起こす恐れがあり，船舶等の安全を確保する上で着水現象の解明が求められる．物体の着水衝撃問題をモデル化するとき固体と液体の識別手法と液体と気体の境界面である自由表面の識別手法を組み込む必要がある．自由表面流れの解析に有限要素法を用いる場合，計算手法の一つにラグランジュ法がある．このラグランジュ法は自由表面境界を計算領域の境界として直接的に表現できるため，境界の捕捉精度に優れている．しかし，自由表面の形状の変化に伴って要素の形状が変化するため，要素の潰れや裏返りが生じ，計算精度の低下や計算の破綻を招く場合がある．これは，計算に用いる要素と節点の組み合わせに関する情報が固定されているためである．そこで齋藤 [1] らは，局所的かつ一時的なメッシュを作りながら流れ計算を行うフリーラグランジュ有限要素法を提案し，自由表面の大変形を伴う現象の計算を行った．本研究では，このフリーラグランジュ有限要素法を用いて物体の着水現象の数値解析を目的とする．

2. 流れの支配方程式と離散化

2.1 流れの支配方程式

2 次元における非圧縮性流体の流れの支配方程式は，ラグランジュ表記のナビエ・ストークス方程式

$$\frac{Du_i}{Dt} = \sigma_{ij,j} + f_i \tag{1}$$

と連続の方程式

$$u_{i,i} = 0 \tag{2}$$

である．ここに，t は時間，$x_i (i = 1, 2)$ は直交座標，u_i は流速の x_i 成分，f_i は外力の x_i 成分であり重力のみを考慮する．また，流体をニュートン流体と仮定すると応力テンソルの成分 σ_{ij} は，

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{1}{Re}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{3}$$

で与えられる．ここに，p は圧力，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．代表長さを L，代表速さを U，動粘性係数を ν とすると，レイノルズ数 Re は，$Re = L\sqrt{gL}/\nu$ で定義される．Fig.1 のように x_2 軸を鉛直上向きにとるとき，外力は $f_1 = 0$，$f_2 = -1/Fr^2$ で与えられる．ここに Fr はフルード数であり，$Fr = U/\sqrt{gL}$(g：重力加速度）で定義される．ここでは $Fr = 1$ となる．

Fig.1 に示すように流体領域 Ω の境界として，自由表面 Γ_f と固体壁 Γ_w，物体表面 Γ_{st} を考えると，Γ_f 上では，

$$p = p_0 \tag{4}$$

を課し，Γ_w と Γ_{st} 上ではすべり条件

$$u_i n_i = \sigma_{ij} n_j t_i = 0 \tag{5}$$

を課す．ここに，p_0 は大気圧，n_i は境界上に立てた外向き単位法線ベクトルの x_i 成分，t_i は単位接線ベクトルの x_i 成分である．

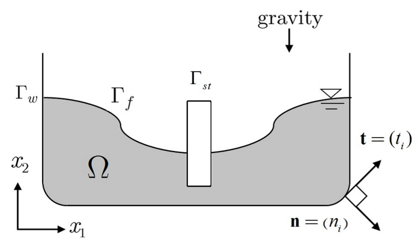


Fig. 1: Fluid region Ω and the boundaries Γ_f , Γ_w , and Γ_{st}

2.2 空間方向の離散化

空間方向の離散化には三角形要素による有限要素法を用いる．流速と圧力はともに x_i の 1 次多項式で近似し，計算の安定化のために PSPG 法 [3] を用いる．PSPG 法を用いると，式 (1),(2) の弱形式は，

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left[u_i^* \left(\frac{Du_i}{Dt} - f_i \right) + u_{i,j}^* \sigma_{ij} + q^* u_{i,j} \right] d\Omega \\ + \int_\Omega q^*_{\mathrm{PSPG}_i} \left(\frac{Du_i}{Dt} - \sigma_{ij,j} - f_i \right) d\Omega = 0\end{aligned} \tag{6}$$

となる．ここに $q^*_{\mathrm{PSPG}_i}$ は PSPG 法によって付加される重み関数であり，

$$q^*_{\mathrm{PSPG}_i} = \tau_{\mathrm{PSPG}}\, q^*_{,i} \tag{7}$$

で定義される．τ_{PSPG} は要素ごとに定義されるパラメータであり，

$$\tau_{\mathrm{PSPG}} = \left[\left(\frac{2\|\mathbf{u}^h\|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{8}$$

で与えられる．ここに，$\mathbf{u}^h$ は要素重心における流速，h_e は要素サイズを示す．弱形式 (6) を空間方向に離散化すると，有限要素方程式

$$\mathbf{Ma} - \mathbf{Hp} + \mathbf{Su} = \mathbf{F} \tag{9}$$

$$\mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{a} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}} \mathbf{u} + \mathbf{H}_\varepsilon \mathbf{p} = \mathbf{F}_\varepsilon \tag{10}$$

を得る．ここに，$\mathbf{a}$ は加速度ベクトル，$\mathbf{u}$ は流速ベクトル，$\mathbf{p}$ は圧力ベクトル，$\mathbf{F}$ は外力ベクトルを表し，$\mathbf{M}$ は質量行列，$\mathbf{H}$ は勾配行列，$\mathbf{S}$ は拡散行列，$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ は発散行列である．このとき，式 (9) は運動方程式 (1) に，式 (10) は連続の方程式 (2) にそれぞれ対応しており，添字 ε は PSPG 法に由来する項であることを意味する．

2.3 時間方向の離散化

時間軸を一定の長さ Δt の小区間に分割し，時刻 $t^n = n\Delta t$ と $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$ に挟まれた区間に注目する．物理量の時刻 t^n における値を知って，時刻 t^{n+1} における値を求めるものとして，式 (9)，(10) を次のように時間方向に離散化する．

$$\mathbf{M}^{n+1}\mathbf{a}^{n+1} - \mathbf{H}^{n+1}\mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{S}^{n+1}\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{F} \tag{11}$$

$$\mathbf{M}_\varepsilon^{n+1}\mathbf{a}^{n+1} + (\mathbf{H}^{\mathrm{T}})^{n+1}\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{H}_\varepsilon^{n+1}\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{F}_\varepsilon \tag{12}$$

このとき，各項の係数行列 $\mathbf{M}^{n+1}$，$\mathbf{H}^{n+1}$，$\mathbf{S}^{n+1}$ は，時刻 t^{n+1} における節点座標 $\mathbf{x}^{n+1}$ の関数であり，未知量であることを意味する．時間積分法の一つであるニューマークの β 法によれば，速度と加速度の関係を

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t(1-\theta)\mathbf{a}^n + \Delta t\theta\mathbf{a}^{n+1} \tag{13}$$

のように表すことができる．ここに，θ は時間積分の精度を決めるパラメータであり，ここでは $\theta = 1/2$ とする．この関係を用いて，式 (11)，(12) より $\mathbf{u}^{n+1}$ を消去し，さらに加速度増分 $\Delta\mathbf{a} = \mathbf{a}^{n+1} - \mathbf{a}^n$ と圧力増分 $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n$ を用いて整理すると，

$$\mathbf{K}^{n+1}\Delta\mathbf{a} - \mathbf{H}^{n+1}\Delta\mathbf{p} = \widetilde{\mathbf{F}} \tag{14}$$

$$\mathbf{K}_\varepsilon^{n+1}\Delta\mathbf{a} + \mathbf{H}_\varepsilon^{n+1}\Delta\mathbf{p} = \widetilde{\mathbf{F}}_\varepsilon \tag{15}$$

を得る．ここに，$\Delta\mathbf{a}$ の係数行列は，それぞれ $\mathbf{K}^{n+1} = \mathbf{M}^{n+1} + \Delta t\theta\mathbf{S}^{n+1}$，$\mathbf{K}_\varepsilon^{n+1} = \mathbf{M}_\varepsilon^{n+1} + \Delta t\theta(\mathbf{H}^{\mathrm{T}})^{n+1}$ である．式 (14)，(15) における各項の係数行列は，依然として未知量 $\mathbf{x}^{n+1}$ の関数であるため，非線形代数方程式 (14)，(15) を解くために次に述べる反復解法を用いる．

1. 式 (14)，(15) の $\mathbf{x}^{n+1}$ を $\mathbf{x}^n$ に置き換えて，$\Delta\mathbf{a}$，$\Delta\mathbf{p}$ を求める．
2. ニューマークの β 法で用いられる関係式

   $$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t\mathbf{u}^n + \Delta t^2\left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\mathbf{a}^n + \beta\mathbf{a}^{n+1}\right] \tag{16}$$

   によって，節点座標を更新する．ここに，β も時間積分の精度を決めるパラメータで，ここでは $\beta = 1/4$ とする．
3. 2 で得られた $\mathbf{x}^{n+1}$ を用いて，式 (14)，(15) の係数行列を組み立て直し，再び $\Delta\mathbf{a}$，$\Delta\mathbf{p}$ を求める．
4. 以後，2 と 3 の過程を必要な回数繰り返す．

3. 計算手法

3.1 フリーラグランジュ有限要素法の概要

本手法の計算手順は次のとおりである．

1. ある節点に注目し，その周辺にローカルな有限要素メッシュを生成する．
2. ローカルメッシュを用いて式 (14)，(15) に対応する要素方程式を組み立てる．
3. 要素方程式を重ね合わせ，注目した節点の方程式のみを全体方程式 (14)，(15) に組み込む．
4. 式 (14)，(15) を解き，すべての節点の加速度，速度，座標，圧力を更新する．
5. 流れの激しさに応じて，節点の追加，削除，再配置の操作を行う．
6. 時間を Δt だけ進めて，1 の過程から繰り返す．

3.2 ローカルメッシュの生成

フリーラグランジュ有限要素法では，流体領域に節点（以後，これを流体節点と呼ぶ）を分布させておき，注目する流体節点 P のまわりに Fig.2 に示すようなローカルメッシュを生成して，節点ごとに方程式を組み立てる．このメッシュは流体節点 P に最も近い節点群を用いて生成され，計算の過程で流体節点が移動するたびに，その都度生成される．なお，このローカルメッシュの生成には，歪みの小さい三角形の生成に適しているデローニの三角分割法 [4] を用いる．

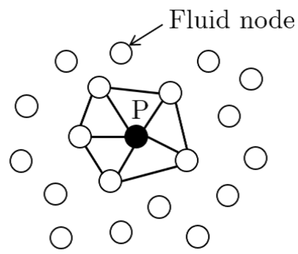


Fig. 2: Local mesh of finite elements around P

3.3 節点の追加，削除，再配置

計算を進めるにつれて，計算領域における節点分布に粗密が発生し，計算精度に影響を与えることがある．そのため以下のような手順で節点の追加，削除，再配置を行う．なお，いずれの手順においてもアダプティブ法の h 法 [6] を用いて評価を行っており，

$$\zeta_e = S_e \left|u_{i,j} - u_{j,i}\right|_e \tag{17}$$

を粗密の評価基準とする．ここに，S_e は要素の面積，$|\ \ |_e$ 内は要素における渦度であり，これらを用いて流れの激しさを評価する．

3.3.1 節点の追加

各要素において，式 (17) からもとめた ζ_e が各，

$$\zeta_e > \gamma_a \sqrt{\frac{1}{NE}\sum_{i=1}^{NE}\zeta_{e_i}^2} \tag{18}$$

を満たすとき，その要素の重心点に新たな節点を追加する．ここに，NE は総要素数，γ_a は節点分布密度を決めるパラメータであり，本研究では $\gamma_a = 20$ とする．新たに追加された節点における速度 u_i^a，加速度 a_i^a，圧力 p^a については，形状関数ベクトル $\left(\mathbf{N}_e^{\mathrm{T}}\right)_{\mathrm{g}}$ を用いて，式 (19) のように補間する．

$$\left.\begin{aligned} u_i^a &= \left(\mathbf{N}_e^{\mathrm{T}}\right)_{\mathrm{g}} \mathbf{u}_{ie} \\ a_i^a &= \left(\mathbf{N}_e^{\mathrm{T}}\right)_{\mathrm{g}} \mathbf{a}_{ie} \\ p^a &= \left(\mathbf{N}_e^{\mathrm{T}}\right)_{\mathrm{g}} \mathbf{p}_e \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

3.3.2 節点の削除

流体節点 P を中心とするローカルメッシュ内の各要素において，式 (17) からもとめた ζ_e の最大値 $\max(\zeta_e)_{\mathrm{P}}$ が

$$\max(\zeta_e)_{\mathrm{P}} < \gamma_d \sqrt{\frac{1}{NE}\sum_{i=1}^{NE} \zeta_{e_i}^2} \tag{20}$$

を満たすとき，流体節点 P を削除する．ここに，NE は総要素数，γ_d は節点分布密度を決めるパラメータであり，本研究では $\gamma_d = 10^{-6}$ とする．

3.3.3 節点の再配置

節点の移動や追加，削除によって節点分布が急激に変化したり，要素が歪むことで計算精度が低下することがある．そこで，式 (17) における ζ_e の値が，$\zeta_e > \gamma_s$（γ_s：しきい値 $\gamma_s = 10^{-4}$）を満たすとき，その節点の再配置を行う．節点 P の再配置後の座標を $\mathbf{x}_{\mathrm{P}}^{n+1}$ としたとき，反復回数 k において

$$\mathbf{x}_{\mathrm{P}}^{n+1} = \sum_{j=1}^{ne} \mathbf{x}_{\mathrm{g}j}^{\mathrm{L}} A_j / \sum_{j=1}^{ne} A_j \tag{21}$$

$$\max(||\mathbf{x}_{\mathrm{P}}^{n+1,(k+1)} - \mathbf{x}_{\mathrm{P}}^{n+1,(k)}||) < \varepsilon \tag{22}$$

を満たすまで反復計算を行い節点分布を均一化する．ここに，ne は節点 P を中心節点としたローカルメッシュを構成する要素の個数，$\mathbf{x}_{\mathrm{g}j}^{\mathrm{L}}$ は要素の重心座標，A_j は要素面積，ε は微小量移動量であり $\varepsilon = 10^{-15}$ とする．

3.4 自由表面節点の識別

自由表面の形状は時々刻々と変化するため，それを構成する流体節点も時々刻々と変化する．したがって，毎回自由表面節点を識別する必要がある．

そこで，まず着目する節点 P のまわりのローカルメッシュにおいて，

$$\overline{h} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h_i \tag{23}$$

で定義される平均節点間距離 $\overline{h}$ を求める．ここに，h_i はローカルメッシュの各節点と中心節点 P との距離，N はローカルメッシュを構成する節点の個数である．

次に，α を正の定数として，Fig.3 のように半径 $\alpha\overline{h}$ を持ち，節点 P を通る円を考えて，その中心を Q とする．$\overline{\mathrm{PQ}}$ を 1 度ずつ変えて，P の周囲に 360 個の円を描く．これらの円の中に，P 以外の流体節点を全く含まない円が存在するとき，P を自由表面上の節点と識別し [5]，境界条件 (4) を課す．なお，本研究では $\alpha = 1.4$ とする．

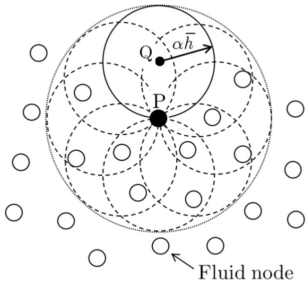


Fig. 3: Recognition of free surface node P

3.5 固体壁節点の識別

本手法では，液体運動を表すためにラグランジュ的に移動する流体節点を導入している．計算領域は時々刻々と変化するため，計算に加えるべき壁境界も時々刻々と変化させる必要がある．そこで，流体節点に加えて，固体壁を表すための壁節点を導入する．壁節点は固体壁の形状や位置，境界条件を与えるために用いられ，運動方程式と連動する移動壁節点（着水物体）と移動しない壁節点（容器）に分類される．これら壁節点はその時刻における流体領域の位置に応じて，流れ計算に組み込まれる活性壁節点と流れ計算から除外される不活性壁節点に識別される．

Fig.4 のような壁節点 A，B が活性か不活性かを識別する過程を考える．まず，判定する壁節点に最も近い流体節点を探索する．その流体節点を中心節点としたローカルメッシュを作成し，式 (23) から $\overline{h}$ を求める．このとき判定する壁節点と中心節点の距離が平均節点間距離よりも小さい場合，その壁節点は活性壁節点であると識別する．Fig.4 のように壁節点 A，B をそれぞれ含んだローカルメッシュにおける平均節点間距離を $\overline{h}_A$，$\overline{h}_B$ とすると壁節点 A は活性壁節点，壁節点 B は不活性壁節点となる．

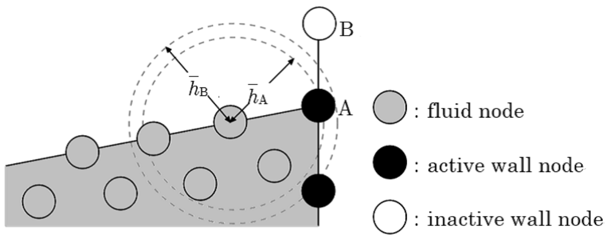


Fig. 4: Active and inactive wall node

3.6 着水現象の計算手順

フリーラグランジュ有限要素法を着水現象の解析に導入するにあたり次の計算手順を用いる．

1. 3.1 節で説明したフリーラグランジュ有限要素法によって流れ計算を行う．
2. 着水物体表面 Γ_{st} に作用する圧力を積分して流体力 F_i^f を求め，物体の運動方程式 (24) を組み立てる．
$$m\frac{d^2X_i}{dt^2} = F_i^f + F_i^g \tag{24}$$
ここに m は物体の質量，$X_i (i = 1, 2)$ は物体重心の直交座標，F_i^g は重力である．
3. 2 次のルンゲクッタ法を用いて運動方程式 (24) を解き，物体の加速度，速度，座標を更新する．
4. 時間を Δt だけ進めて，1 の過程から繰り返す．

4. 計算結果

Fig.5 のように自由表面上中央に矩形の着水物体（移動壁節点）を配置し，下向きに初速 0.33m/s を与えることで，Cheng ら [7] による着水実験との比較計算を行う．このとき代表長さ，レイノルズ数，フルード数，時間増分，物体質量は，それぞれ $L = 7.6\text{cm}$，$Re = 6.53 \times 10^4$，$Fr = 1$，$\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}\text{s}$，$m = 10.22\text{kg}$ とする．また，計算に用いる初期の流体節点を 10132 個とする．Fig.6 に各時刻における圧力分布と水没状況を示す．Fig.6(a) は，時刻 $t = 0.0016\text{s}$ において発生した物体底面の圧力分布を表しており，着水時のピーク圧力 6.34kPa が得られた．Fig.6(b) は時刻 $t = 0.03\text{s}$ における圧力分布と水面形状を示しており，水没と同時に水面の盛上がりや底面圧力が周囲よりも高く計算されていることがわかる．

Fig.7 は物体底面中央に位置する移動壁節点の圧力の時間変化を表しており，本研究における計算結果と Cheng らによる実験結果との比較を示す．Fig.7 では時刻 $t = 0.0016\text{s}$ においてピーク圧力 6.34kPa が得られているが，Cheng らの実験によるピーク圧力 6.19kPa よりも大きく計算されている．またピーク圧力が発生する時刻も Cheng らの実験よりも $t = 0.0005\text{s}$ 早く，実験値との乖離が見られた．一方で，ピーク圧力が落ち着いた後の時刻 $t = 0.01\text{s}$ 以降では，Cheng らの実験値との一致が見られ，水没に伴い徐々に水圧が上昇していく過程が再現できた．しかし，時刻 $t = 0.01\text{s}$ 以降では不自然な圧力振動がたびたび発生しており，圧力の安定化のために用いた PSPG 法が十分に機能していないことが考えられる．

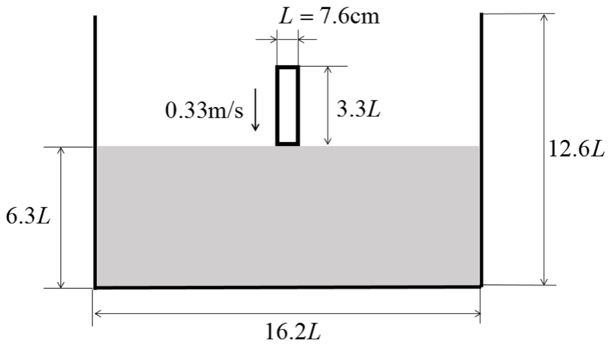
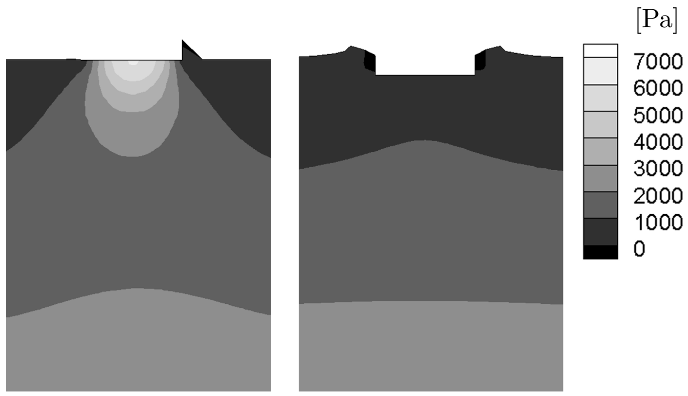


Fig. 5: Computational model



(a)$t = 0.0016$s　(b)$t = 0.03$s

Fig. 6: Pressure distribution

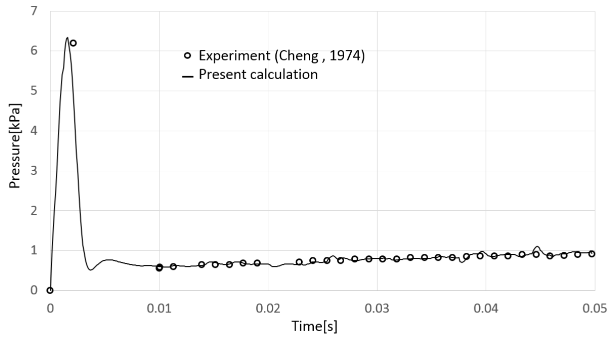


Fig. 7: Time history of the pressure acting at the center of the impact surfer

5. 結論

フリーラグランジュ有限要素法を用いた矩形物体の着水衝撃問題を取り扱い，実験値との比較を行った．着水物体の速度変化から得られる着水直後のピーク圧，水没に伴う圧力の推移，水面の盛上りなど着水現象特有の変化を計算することができた．本研究では圧力の安定化を目的として PSPG 法を導入しているが，圧力の安定化がいまだ十分とはいえず，PSPG 法由来の項が含まれる式 (15) の組み立てや解法に改良が必要だと考えられる．

参考文献

(1) 斎藤敦史, 村上拓, 中山司, “有限要素法をベースとしたフリーラグランジュ法による粘性自由表面流れの数値解析”, 日本流体力学会誌『ながれ』, **28**(2009), 399-408.

(2) 広川雅之, 表面張力を考慮した自由表面流れのフリーラグランジュ有限要素法による解析, 修士論文, 中央大学, (2014)

(3) T. E. Tezduyar, Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, Advances in Applied Mechanics, **28**(1992), 1-44.

(4) S. W. Sloan, A fast algorithm for constructing Delaunay triangulations in the plane, Advances in Engineering Software, **9**(1987), 34-55.

(5) E. Onãte, J. Garia, S. R. Idelsohn, F. Del Pin, Finite calculus formulations for finite element analysis of incompressible flows, Comput. Methods Appl. Engrg., **195**(2006), 3001-3037.

(6) J.Wu, J. Z. Zhu, J. Szmelter and O. C. Zinkiewicz, Error estimation and adaptivity in Navier-Stokes incompressible flows, Computational Mechanics, **6**(1990), 259-270.

(7) R. Y. K. Cheng, T.J.W. Leland, Numerical solution for low-velocity pentration of rigid body into still fluid, Numerical Methods in Fluid Dynamics (edited by C. A. Brebbia and J. J. Connor), Pentech Press, 1974, 272-289.