VOF 法と Penalization 法を併用した多相連成解析

Numerical analysis of the multi-phase interaction by the combined use of the VOF and the penalization methods

精密工学専攻　34 号　内記 大輔
Daisuke Naiki

1. 序論

私たちの身の周りでは，気相・液相・固相の 3 相がそれぞれ独立して起こる現象よりも，3 相が互いに作用を及ぼし合いながら起こる現象が多く存在する．数値流体力学の分野ではこの 3 相連成解析が盛んに行われている．物体が空気中から水中に進入する着水現象を例に挙げると，物体の着水時に作用する衝撃圧を知ることは物体の強度確保に役立つ．そのため，3 相連成現象を数値解析することは重要な問題である．

3 相連成現象の様な自由表面や物体の境界が移動する問題を数値解析する方法には，ラグランジュ的な手法とオイラー的な手法がある．ラグランジュ的な手法は，時間ステップ毎に移動境界に合わせて計算領域のメッシュの再分割を行う．移動境界を正確に捕らえることができる反面，計算が複雑化し，計算時間の増大につながる欠点がある．一方，オイラー的な手法は計算領域全体を固定したメッシュで覆い，そのメッシュ上で移動境界を識別する．よって，境界を追跡するだけで良いのでメッシュの再分割が不要であり，移動境界の扱いが容易である．

オイラー的に自由表面を識別する手法の一つに VOF 法がある．この手法は，要素内で流体が占める割合を表す体積関数を用いて 2 相計算を行う手法である．体積関数が気相では 0，液相では 1 と定義されるだけでありアルゴリズムが簡単であることが特徴である．また，オイラー的に物体の境界を識別する手法の一つに Penalization 法がある．この手法は，未知量の増加がない上に運動方程式に通常の離散化を施すだけであることが特徴である．

本研究では気相と液相の識別に VOF 法，流体と固相の識別に Penalization 法を用いる．これらの手法を併用して 3 相連成問題に対する計算手法の構築を目的とする．

2. 支配方程式

Fig. 1 に示すような，物体を自由表面に落下させ水中に進入する問題を考える．流体は非圧縮性粘性流体の 2 次元層流，物体は剛体とし回転を考慮しない．Fig. 1 において Ω_s は物体の内部領域，Ω_f は流体領域である．このとき流れの支配方程式は式 (1) のナビエ・ストークス方程式と式 (2) の連続の式である．

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\right]=-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{u}+\mathbf{g}\quad(\Omega_f\ 内)\tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=\mathbf{0}\quad(\Omega_f\ 内)\tag{2}$$

ここで，t は時間，$\mathbf{u}$ は速度，p は圧力，ρ は密度，μ は粘性係数，$\mathbf{g}$ は外力項であり重力を考える．境界条件は Γ_1 上では滑り境界条件，Γ_2 上では開放境界条件，物体表面である Γ_s 上では滑りなし境界条件

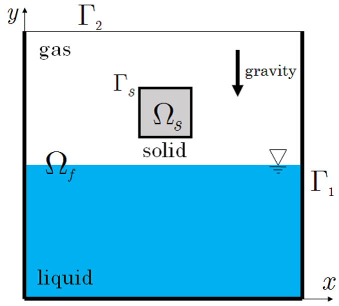


Fig. 1 Computational model for the water entry of a rigid body

$$\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}_b\quad(\Gamma_s\ 上)\tag{3}$$

を課す．ここに $\hat{\mathbf{u}}_b$ は物体の速度を表す．

3. Penalization 法

3.1 Penalization 法の概要

本研究で扱う問題は，流体領域の中を物体が移動し，それに伴って境界 Γ_s の位置が時間とともに変化する移動境界問題である．仮想境界法の一つである Penalization 法では，物体が占める領域 Ω_s を仮想的な流体が占めると考え，その仮想流体に式 (4) の条件を課す．

$$\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}_b\quad(\Omega_s\ 内)\tag{4}$$

この条件をペナルティ項として運動方程式 (1) の中へ組み込むと式 (5) を得る．

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\right]=-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{u}+\mathbf{g}+\rho\lambda\chi(\hat{\mathbf{u}}_b-\mathbf{u})\quad(\Omega\ 内)\tag{5}$$

ここに λ はペナルティ係数，χ は次式で定義されるマスク関数である．

$$\chi=\begin{cases}0 & (\Omega_f\ 内)\\ 1 & (\Omega_s\ 内)\end{cases}\tag{6}$$

式 (5) の右辺第 4 項は，マスク関数によって Ω_s 内でのみ有効であり，$\mathbf{u}\neq\hat{\mathbf{u}}_b$ の場合は物体外の流体に対する仮想的な外力として作用する．つまり仮想的に物体が存在することになる．よって式 (5) を用いることで，モデル全領域

$\Omega(=\Omega_f \cup \Omega_s)$ を流体領域とみなすことができ，物体の移動に伴うメッシュの変更が不要となる．未知量としてラグランジュの未定乗数が追加される Fictitious domain 法とは違い，Penalization 法は未知量の増加がないため，簡便な計算手法として注目されている．

3.2 Smoothed Heaviside 関数の導入

Penalization 法では，物体表面 Γ_s が新たな要素に進入するとき，唐突にマスク関数 χ が更新される．これにより Γ_s 上でペナルティ項の値が急激に変化し，圧力の時間変化に数値振動が現れる．例えば，Fig. 2 は Fig. 6 のモデルで計算した物体底面に作用する圧力の時間変化である．そこで本研究では，マスク関数 χ の定義に Smoothed Heaviside 関数 [1] を導入して数値振動を抑えることを提案する．これは階段関数である Heaviside 関数を滑らかで連続的な関数に置き換えたものである．式 (6) を式 (7) のように改めて，Γ_s から ε の厚さの間でマスク関数 χ を滑らかに定義する．z は節点座標と物体表面座標の差である．

$$\chi = \begin{cases} 1 & if \quad z \geq \varepsilon \\ 0.5\left[1 + \dfrac{z}{\varepsilon} + \dfrac{1}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi z}{\varepsilon}\right)\right] & if \quad |z| \leq \varepsilon \\ 0 & if \quad -z \geq \varepsilon \end{cases} \tag{7}$$

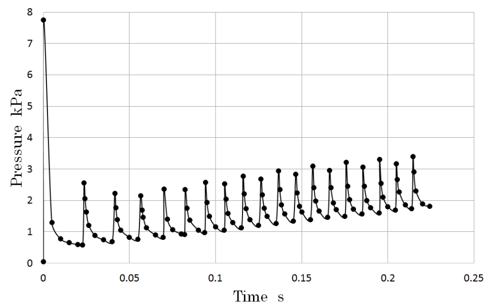


Fig. 2 Time history of the pressure without Smoothed Heaviside function for the model of Fig. 6

4. 流れの支配方程式の離散化

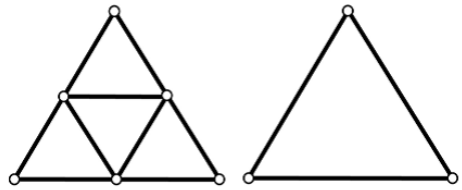
4.1 空間方向の離散化

空間方向の離散化には有限要素法を用いる．有限要素として Fig. 3 に示す三角形要素を用いる．Fig. 3 (a) のように要素を四つの小三角形に分けて各小三角形内で速度を x，y の 1 次多項式で近似する．圧力は Fig. 3 (b) のように要素全体領域の中で x，y の 1 次多項式で近似する．式 (2)，(5) に対する弱形式を導き空間方向に離散化すると式 (8)，(9) を得る．

$$\overline{\mathbf{M}}\frac{d\mathbf{U}}{dt} + [\mathbf{A}(\mathbf{U}) + \mathbf{D}]\mathbf{U} - \mathbf{HP} \\ -\mathbf{G} - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}_b - \mathbf{U}) = \mathbf{0} \tag{8}$$

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \mathbf{0} \tag{9}$$

ここに，$\overline{\mathbf{M}}$ は対角化された質量行列，$\mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{U}$ は移流項，$\mathbf{DU}$ は拡散項，$\mathbf{HP}$ は圧力項，$\mathbf{G}$ は外力項，$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}_b - \mathbf{U})$ はペナルティ項を表す．



(a)Velocity (b)Pressure

Fig. 3 Triangular elements for velocity and pressure

4.2 時間方向の離散化

時間方向の離散化には差分法を用いる．時間軸を一定の長さ Δt の小区間に分割し，時刻 $t^n = n\Delta t$ と時刻 $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$ に挟まれた代表的な区間に注目する．時刻 t^n の物理量を知り，時刻 t^{n+1} の値を求めるものとして式 (8)，(9) を次のように時間方向に離散化する．

$$\overline{\mathbf{M}}\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + \left[\mathbf{A}(\mathbf{U}^n) + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}^n - \mathbf{HP}^{n+1} \\ -\mathbf{G} - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}_b - \mathbf{U}^n) = \mathbf{0} \tag{10}$$

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{0} \tag{11}$$

ここに，上付き添字 $n, n+1$ はそれぞれ時刻 t^n, t^{n+1} における値であることを表す．式 (10)，式 (11) を fractional-step 法の一つである SMAC 法 [2] を用いて解く．

5. VOF 法

VOF 法は気液 2 相流において，気相と液相を識別するための手法で，次式で定義される VOF 関数 ϕ を用いる．

$$\phi = \begin{cases} 0 & : \text{気相} \\ 1 & : \text{液相} \end{cases} \tag{12}$$

VOF 関数 ϕ は要素内での液体の体積比率を表している．$0 < \phi < 1$ のとき，その要素内に自由表面が存在することを意味する．密度と粘性係数は VOF 関数 ϕ により次式から決定される．

$$\rho(\phi) = \rho_g(1 - \phi) + \rho_l\phi \tag{13}$$

$$\mu(\phi) = \mu_g(1 - \phi) + \mu_l\phi \tag{14}$$

ここに $\rho_g, \rho_l, \mu_g, \mu_l$ はそれぞれ液体，気体の密度と粘性係数を表す．VOF 関数 ϕ は移流方程式

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\phi = 0 \tag{15}$$

に従って変化する．本研究では，式 (15) の解法に特性曲線法 [2] を用いる．

6. 計算手順

6.1 計算アルゴリズム

以下に計算アルゴリズムを示す．

1. 各節点が物体領域 Ω_s 内に存在するか否かを調べ，各節点におけるマスク関数 χ の値を定める．

2. VOF 関数 ϕ の分布により物性値を求める．物性値は三角形要素内で一定とする．
3. 式 (10)，(11) を解いて時刻 t^{n+1} の流速と圧力を求める．
4. 移流方程式 (15) を解き，VOF 関数 ϕ の分布を更新する．
5. 物体に作用する流体力を求める．
6. 物体の運動方程式を解き，物体の位置を更新する．
7. 時間を Δt だけ進めて手順 1 より繰り返す．

6.2 物体の運動方程式の解法

物体の運動方程式は

$$m\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{F}_\lambda + \mathbf{F}_g \tag{16}$$

で与えられる．ここに，m は物体の質量，$\mathbf{X}$ は物体の重心変位，$\mathbf{F}_\lambda$ は流体力，$\mathbf{F}_g$ は重力を示す．式 (16) を

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{U}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{F}_\lambda/m + \mathbf{F}_g/m\end{Bmatrix} \tag{17}$$

のように書き直し，簡単に

$$\frac{d\mathbf{\Phi}}{dt} = \mathbf{R}(\mathbf{\Phi}) \tag{18}$$

と表すとき，これを次のような 2 段階の時間積分法で解く．

$$\text{(i)} \quad \mathbf{\Phi}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{\Phi}^n + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{R}(\mathbf{\Phi}^n) \tag{19}$$

$$\text{(ii)} \quad \mathbf{\Phi}^{n+1} = \mathbf{\Phi}^n + \Delta t\mathbf{R}(\mathbf{\Phi}^{n+\frac{1}{2}}) \tag{20}$$

6.3 流体力の計算

Penailization 法において，ペナルティ項は物体が流体に及ぼす仮想的な外力を表す．したがって作用反作用の法則により，流体が物体に及ぼす力 $\mathbf{F}_\lambda$ はペナルティ項を用いて

$$\mathbf{F}_\lambda = -\int_\Omega \rho\lambda\chi(\hat{\mathbf{u}}_b - \mathbf{u})d\Omega \tag{21}$$

で与えられる．

7. 数値計算

7.1 浮体の水面での振動

物体が重力と浮力によって水面で振動する問題を取り上げ，物体に働く流体力の精度検証を行う．計算モデルを Fig. 4 に示す．物体の質量を 6.67kg，幅 L を 0.10m とした物体が水面に接した状態から自由落下させる．液体は水とし，密度を 1.00×10^3kg/m^3，粘性係数を 1.31×10^{-3}Pa·s とする．気体は空気とし，密度を 1.20kg/m^3，粘性係数を 1.81×10^{-5}Pa·s とする．用いるメッシュの要素数は 1872，節点数は 3869，時間増分 Δt は 10^{-4}s，ペナルティパラメータ λ は 20000s^{-1} とする．

静止液面から測った物体重心の y 方向変位の時間変化を Fig. 5 に示す．物体の重心が静止時の厳密解に収束していく様子を観察できる．この結果より，ペナルティ項による流体力の計算が正しく行えていることを確認できた．

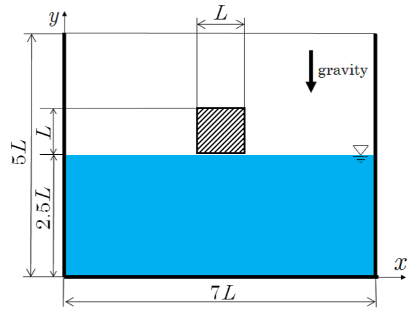


Fig. 4 Computational model of a floating body

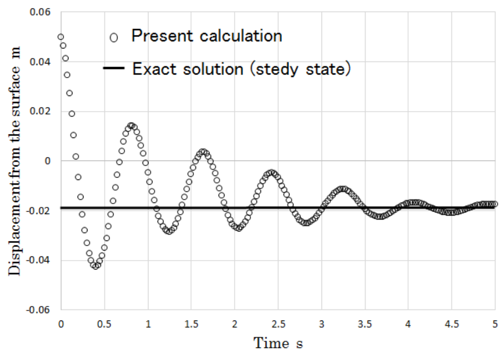


Fig. 5 Time history of the displacement of a body

7.2 矩形物体の着水

Cheng ら [(3)] が行った矩形物体の着水実験の結果と本手法による計算結果を比較する．同時に Smoothed Heaviside 関数の効果を確認する．計算モデルを Fig. 6 に示す．物体の質量を 10.22kg，幅 L を 0.08m とした矩形物体の底が自由表面に接した状態から鉛直下向きに 0.33m/s の初速度を与える．液体は水，気体は空気とし，物性値は 7.1 節と同様である．メッシュの要素数は 5000，節点数は 10201，時間増分 Δt は 10^{-4}s，ペナルティパラメータ λ は 4000s^{-1} とする．Smoothed Heaviside 関数に用いる ε は要素代表長さを h として $2h$ とする．

矩形物体落下直後の圧力分布を Fig. 7 に示す．物体先端で衝撃圧 6.82kPa を確認できた．矩形物体底の中心にかかる圧力の時間変化を Fig. 8 に示す．Smoothed Heaviside 関数を用いてマスク関数の定義を改めたことで，Fig. 2 と比べて圧力振動が収まっていることがわかる．また，Cheng らの実験値に近い計算値が得られており，圧力の計算について良好な結果であると言える．

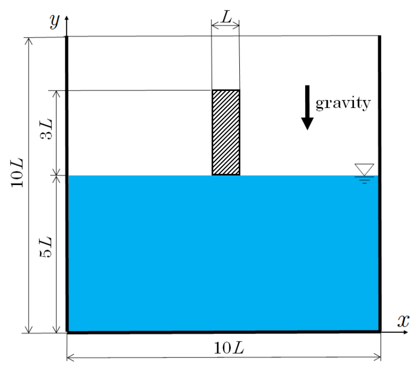


Fig. 6 Computational model of a rectangular body

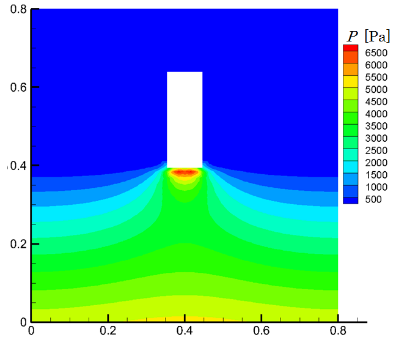


Fig. 7　Pressure distribution (t=2.0 × 10^{-4}s)

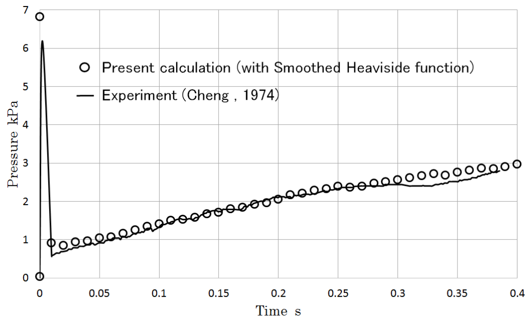


Fig. 8　Time history of the pressure acting at the center of the impact surface

7.3 くさび形物体の着水

くさび形物体の着水計算を行い，Zhao ら [4] の実験結果，Oger ら [5] の SPH 法による計算結果との比較を行う．くさび形物体のモデルを Fig. 9 に示す．Zhao らの実験では P1-P5 の位置に圧力測定点を設けている．全体の計算モデルを Fig. 10 に示す．物体の質量を 241kg，上辺 L を 0.5m とした物体の先端が自由表面に接した状態から鉛直下向きに 6.15m/s の初速度を与え落下させる．液体は水，気体は空気とし，物性値は 7.1 節と同様である．メッシュの要素数は 7200，節点数は 14641，時間増分 Δt は 10^{-5}s，ペナルティパラメータ λ は $10^5\mathrm{s}^{-1}$ とする．Smoothed Heaviside 関数の ε は要素代表長さ h とする．

時刻 0.0158s におけるくさび形物体の右斜面に沿う圧力分布を Fig. 11 に示す．図中の横軸は圧力測定点の y 座標を物体の落下距離 $\int_0^t V(t)dt$ で無次元化したものを示し，縦軸は圧力 p を $0.5\rho V^2$ で無次元化したものを示す．実験値，SPH 法での計算値と同様に，P1 から P5 に向かって圧力が上昇している様子がわかる．Zhao らの実験結果とはやや離れているが，Oger らの SPH 法による計算結果に比較的近い圧力分布を得ることができた．

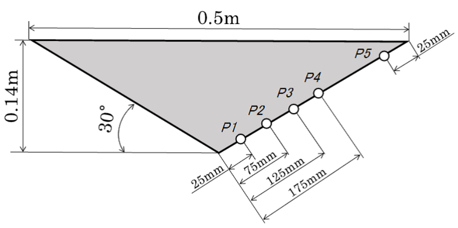


Fig. 9　The size of a wedge and the position of pressure gauge

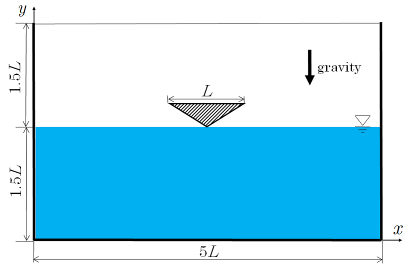


Fig. 10　Computational model for the water entry of a wedge

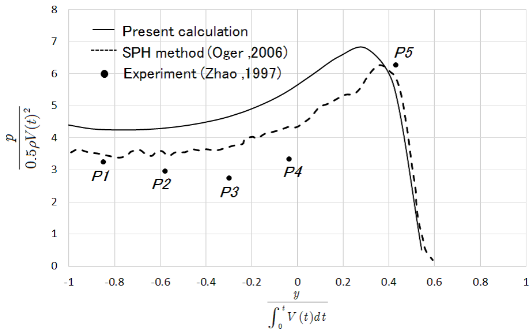


Fig. 11　Comparisons of pressure distribution along the wedge surface (t=0.0158s)

8. 結論

VOF 法と Penalization 法を併用して着水現象を例に取り，気液固 3 相の連成解析をオイラー的に扱う計算手法を構築した．浮体の水面での振動計算では，流体力を求める際にペナルティ項を積分する方法を示した．矩形物体の着水計算では，Smoothed Heaviside 関数の導入によって圧力振動を抑えることを示した．最終的にくさび型物体の着水計算で圧力値において実験，SPH 法と定量的な比較を行い，概ね良好な結果を得ることができた．計算精度に関して改良の余地は残すものの，本手法は 3 相の連成解析をオイラー的に扱う手法として有効であることを示した．

参考文献

(1) Towers, J.D., Finite difference methods for approximating Heaviside functions, Journal of Computational Physics, **228**-9(2009), pp.3478-3489

(2) 中山司，流れ解析のための有限要素法入門，東京大学出版会，東京 (2008)

(3) Cheng, R.Y.K. and Leland, T.J.W., Numerical solution for low-velocity penetration of rigid body into still fluid, Numerical Methods in Fluid Dynamics (edited by C.A. Brebbia and J.J. Connor), Pentech Press, London, (1974), pp.272-289

(4) Zhao, R., Faltinsen, O. and Aarsnes, J., Water entry of arbitrary two-dimensional sections with and without flow separation, Proceedings of the 21st Symposium on Naval Hydrodynamics, (1997)

(5) Oger, G., Doring, M., Alessandrini, B. and Ferrant, P., Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries, Journal of Computational Physics, **213**(2006), pp.803-822