

SPICE を用いた離散的通信路の通信路容量の計算に関する研究

An Algorithm for Computing the Capacity of Discrete Memoryless Channels

Using SPICE

電気電子情報通信工学専攻 足立 聖

Kiyoshi ADACHI

1. まえがき

通信路容量は通信路の伝送能力を示す量であり, Shannon の情報理論において重要な役割を果たす概念である. 既に記憶のない離散的通信路に対して通信路容量を計算する手法がいくつか提案されているが, その代表的なものとしては, 通信路行列が正方行列の場合に対する室賀氏の方法, 有本氏と Blahut により独立に提案された任意の通信路に対する逐次的計算法などがある [1]~[4]. しかし, 有本氏の方法は収束が非常に遅いという欠点があった.

これに対し, 直方体分割を用いたホモトピー法に基づく通信路容量の計算法が提案されている [5]. ホモトピー法は電子回路解析や数値計画法など多くの分野で派生する非線形方程式に対して大域的収束性をもつ, 非線形方程式の構成的求解法である [6], [7]. 文献 [5] では, 通信路容量を求める問題が基本的に非線形凸計画問題として記述できることに着目して, Kuhn-Tucker 方程式にホモトピー法を適用することにより通信路容量を求められることを示している. この手法は計算効率の改善された大域的収束性のある手法であるが, プログラミングが非常に複雑で実装容易性に欠ける.

このような問題を理論面・実用面の両方から解決する方法として「式を回路で記述して SPICE で解く」という逆転的発想に基づく方法論である SPICE 指向型解析法に関する研究が行われている [8], [9]. 本論文では, この方法論を用いることにより, SPICE 上で高度なホモトピー法を, 複雑なプログラミングを行うことなく通信路容量を求める問題を解く方法を提案する.

2. 通信路容量

情報理論では, 通信路に雑音があるとき, 信頼できる情報伝送が実現できるための伝送率の上極限として通信路

容量が定義される [10]. 本章では, 通信路容量を求める問題が非線形システムの最適化問題として記述されることを示し, 更に Kuhn-Tucker 方程式を解くことによりこの問題が解決されることを述べる.

n 入力, m 出力の記憶のない離散的通信路は, $m \times n$ の行列

$$P = (P_{ji}), j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

で表現することができる. 但し, P は条件

$$P_{ji} \geq 0, \sum_{j=1}^m P_{ji} = 1 \quad (2)$$

を満たすものとする. 行列 P は通信路行列と呼ばれる. 以下では通信路行列 P によって表される通信路を通信路 P と呼ぶことにする.

通信路 P に任意の入力確率分布

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$$

$$p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (3)$$

をもつ入力情報源をつないだとき, 入力と出力間の相互情報量は

$$I(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_i P_{ji} \log \frac{P_{ji}}{\sum_{k=1}^n p_k P_{jk}} \quad (4)$$

で定義される. ここで $I(\mathbf{p})$ は上に凸な関数であることが知られている [10].

通信路容量は相互情報量の入力確率分布に関する最大値として定義される. 従って通信路容量 C は次のように定められている.

$$C = \max_{\mathbf{p}} I(\mathbf{p}) \quad (5)$$

ここで式 (5) を目的関数, 式 (3) を制約条件とみなす最適化問題を考える. この最適化問題は目的関数と制約

関数がともに上に凸であるから、入力確率分布 \mathbf{p} および通信路容量 C が最適解となるための必要十分条件は、 \mathbf{p} と C が Kuhn-Tucker 方程式の解となることである。Kuhn-Tucker 方程式を立てると、次のようになる [5].

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m P_{ji} \log \frac{P_{ji}}{\sum_{k=1}^n p_k P_{jk}} - C + \lambda_i^+ &= 0 \\ i &= 1, 2, \dots, n \\ \lambda_i^- - p_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n P_i - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

但し、 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ は補助変数であり、 λ^+ および λ^- は次のように定義される。

$$\lambda^+ = \max\{0, \lambda\}^k, \quad \lambda^- = \max\{0, -\lambda\}^k \quad (7)$$

k は正整数、 λ^+ および λ^- は λ の連続変数であることに注意する。

ここで、式 (6) の $p_i = \lambda_i^-$ という関係より変数 p_i を消去すると、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m P_{ji} \log \frac{P_{ji}}{\sum_{k=1}^n \lambda_k^- P_{jk}} - C + \lambda_i^+ &= 0 \\ i &= 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i^- - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

が得られる。式 (8) は $n+1$ 個の変数 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 、 C と $n+1$ 個の式よりなる $n+1$ 元連立非線形方程式となっている。このような非線形方程式を解くことにより通信路容量 C と相互情報量を最大にする確率ベクトル \mathbf{p} を求めることができる。

3. ホモトピー法

本論文では、最初に非線形方程式の大域的求解法であるホモトピー法について概説する。 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ を N 次元ベクトル、 \mathbf{f} を N 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^N から \mathbf{R}^N への連続写像とし、非線形方程式

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (9)$$

を解く問題を考える。

式 (9) をホモトピー法で解く場合、まず既知解 \mathbf{x}^0 をもつ補助方程式

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (10)$$

を考え、 t をパラメータとするホモトピー

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = t\mathbf{f}(\mathbf{x}) + (1-t)\mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (11)$$

を導入する。そして方程式

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad (12)$$

の解曲線を $t=0$ のときの自明解 $(\mathbf{x}^0, 0)$ から出発して追跡する。このとき、解曲線が点 $(\mathbf{x}^*, 1)$ で $t=1$ 超平面と交われば、 \mathbf{x}^* が式 (9) の解となる。このようにして非線形方程式 (9) の解を求めるのがホモトピー法の原理である。直方体分割を用いたホモトピー法ではホモトピー自体が変数分離可能であることを利用し、解曲線の追跡法として直方体分割を用いることで解曲線追跡の効率化を行っている。

4. SPICE への適用

SPICE を用いて非線形方程式を解析するためには、方程式を回路で表現しなければならない。そこで SPICE 指向型解析法の中核を担う、パス追跡回路を用いたホモトピー法について説明する [8], [9].

非線形方程式 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ の解をホモトピー法で求める場合、この方法では \mathbf{x}^0 を解とする別の方程式 $\mathbf{f}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ を考え、パラメータ t を導入し、 (\mathbf{x}, t) を変数とする方程式を考える。また、 $(\mathbf{x}^0, 0)$ を始点としたときのパスの弧長を s とする弧長の微小変化に関する方程式を考え、これら二つの式を連立させた微分代数方程式

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = t\mathbf{f}(\mathbf{x}) + (1-t)\mathbf{f}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (13)$$

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 1 \quad (14)$$

を $(\mathbf{x}^0, 0)$ から始めて数値積分することによりパスを追跡することができる。

このような作業を SPICE 上で実現するには、式 (13) を図 1 のような回路で記述し、式 (14) を図 2 のような回路で記述する。 G は SPICE の制約を満たすためのダミー抵抗で、本研究では $G = 10^{-12}$ としている。したがって、これらの回路を SPICE で過渡解析する事により式 (13) のパスを追跡する事ができる。但し、弧長 s は過渡解析における時間に対応する。図 2 のような回路をパス追跡回路とよぶ。

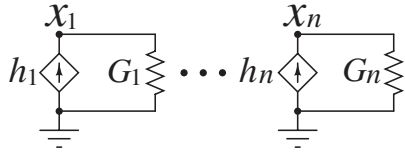


図1 式(1)を記述する回路

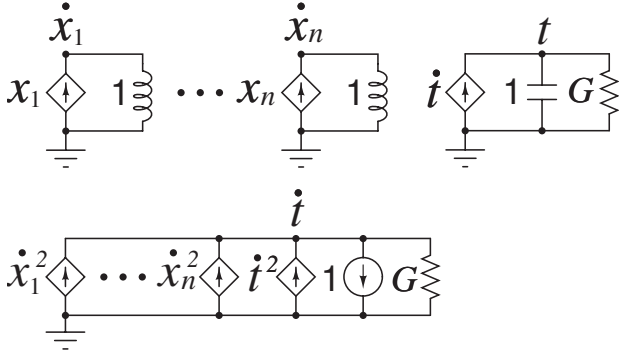


図2 式(2)を記述する回路

4.1 ホモトピー法の適用

通信路容量を求める問題にホモトピー法を適用するために、パラメータ $t \in [0, 1]$ を導入し次のような問題を考える。

$$C = \max_p \left\{ tI(\mathbf{p}) - \frac{1}{2}(1-t)\|\mathbf{p} - \mathbf{p}^0\|^2 \right\} \quad (15)$$

この式では、 $t = 0$ のとき

$$C = \max_p \left\{ -\frac{1}{2}\|\mathbf{p} - \mathbf{p}^0\|^2 \right\} \quad (16)$$

となり、自明解 \mathbf{p}^0 をもつ、また $t = 1$ のとき

$$C = \max_p I(\mathbf{p}) \quad (17)$$

となり、式(5)と一致し解 \mathbf{p}^* をもつ。

式(15)を目的関数、式(3)を制約条件とする非線形計画問題に対して、改めて Kuhn-Tucker 方程式を立てると次のようなホモトピー方程式を得ることができる。

$$-(1-t)(p_i - p_i^0) + t \sum_{j=1}^m P_{ji} \log \frac{P_{ji}}{\sum_{k=1}^n p_k P_{jk}} - C + \lambda_j^+ = 0 \quad (18)$$

$$\lambda_i^- - p_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n p_i - 1 = 0$$

ここで初期値 $\mathbf{x}^0 = (p_1^0, \dots, p_n^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0, C^0)^T$ としては

$$\begin{aligned} p_i^0 &= 1/n, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \lambda_i^0 &= \frac{-1}{\sqrt{n}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ C^0 &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

を用いることにする。

従って、式(18)を解くことによって通信路容量を求めることが可能となる。

4.2 Kuhn-Tucker 方程式の記述

前節において非線形計画問題の最適解は式(18)を解くことによって得られることを示した。したがって、非線形計画問題を SPICE 上で解くには式(18)を SPICE 上に実現し、パス追跡回路を適用すればよい。しかし、Kuhn-Tucker 方程式(18)は式(7)を含んでいる。SPICE には式(7)を表す組み込み関数は存在しないため、これらも回路で記述する必要がある。そこで説明の簡単のため、 k を正整数とし、 $\alpha \in \mathbf{R}^1$ を与えて、式(20)を考え、これを実現するために以下のような方法を取る。

$$\begin{aligned} \alpha_j^+ &= \max(0, \lambda_j) \\ \alpha_j^- &= \max(0, -\lambda_j) \end{aligned} \quad (20)$$

式(20)をグラフで描くとそれぞれ図3、図4のようになる。

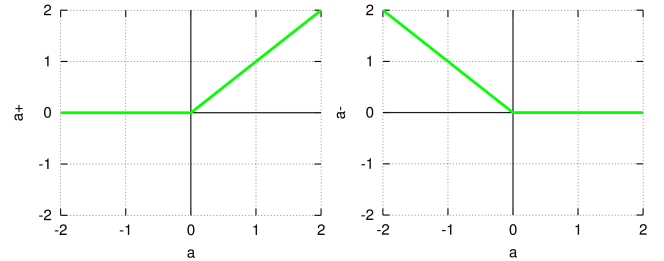


図3 α^+ のグラフ

図4 α^- のグラフ

このグラフを表す方程式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \alpha_j^+ &= \frac{1}{2}(|\alpha_j| + \alpha_j) \\ \alpha_j^- &= \frac{1}{2}(|\alpha_j| - \alpha_j) \end{aligned} \quad (21)$$

したがって、式(21)を表す図5のような回路を記述すれば、式(20)を実現することができる。ただし、従属電源の制御式は

$$\begin{aligned} A_j^+ &= \frac{1}{2}(|\alpha_j| + \alpha_j) \\ A_j^- &= \frac{1}{2}(|\alpha_j| - \alpha_j) \end{aligned} \quad (22)$$

とする。

よって、式(7)を忠実に再現するためには、式(22)の右辺をそれぞれ k 乗すればよい。

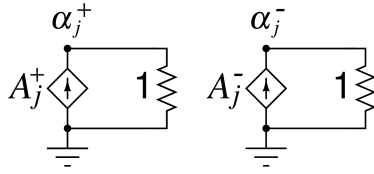


図5 α_j^+ , α_j^- の生成回路

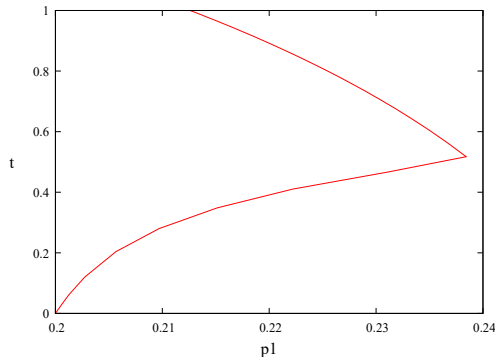
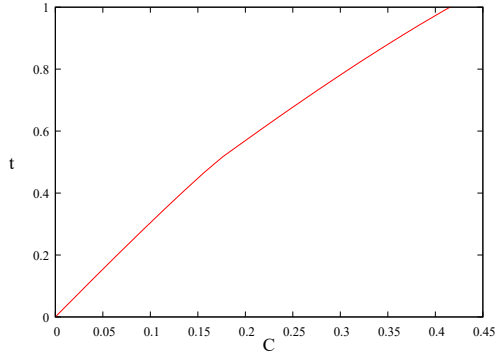


図6 数値例1

5. 数値例

提案手法を SPICE3f5 上に実装し, HP Pavilion 550-140jp/CT(CPU:Imtel Core i7-4790 3.60GHz) でシミュレーション実験を行った. 本章では, 通信路 P の通信路容量を求める問題 [5] の数値例を示す. $m = n = 5$ の次のような通信路 P の通信路容量を求める.

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & 0.5 & 0.2 & 0.0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

結果, 文献 [5] と同様に図 6 のような通信路容量 C と相互情報を最大にする確率ベクトル \mathbf{p} を得られた.

6. むすび

本論文では, ネットリストを入力するだけでプログラミングが一切ない手法を提案した. 通信路容量の計算問題は非線形計画問題を解くことと等価であることから非線形計画問題の例題として扱い, 情報理論の分野に対してもパス追跡回路を用いて SPICE に適用できることを示した. この結果から SPICE で非線形計画問題を解く方法の有効性を確認できる.

また, SPICE を使用することから情報理論やその他の分野に対しても計算効率や精度に関して, 大きく期待がもてる新しい方法論を導入できることが今後の発展として考えられる.

参考文献

- [1] S. Muroga, "On the capacity of a discrete channel I," J. Phys. Soc. Jpn. vol.8, no.4, pp.484-494, July 1982.
- [2] B. Meister and W. Oettli, "On the capacity of a discrete, constant channel," Inf. Control, vol.11, pp.341-351, Aug. 1967.
- [3] S. Arimoto, "An algorithm for computing the capacity of arbitrary discrete memoryless channels," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-18, no.1, pp.14-20, Jan. 1972.
- [4] R. E. Blahut, "Computation of channel capacity and rate-distortion functions," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-18, no.4, pp.460-473, July 1972.
- [5] 山村清隆, 福山健次郎, 堀内和夫, "記憶のない離散的通信路に対する直方体分割を用いた通信路容量の計算法," 信学論 (A), vol.J73-A, no.3, pp.576-583, March 1990.
- [6] 井上靖秋, "大規模回路の直流動作点解析," 信学論 (A), vol.J77-A, no.3, pp.388-398, March 1994.
- [7] K. Yamamura, T. Sekiguchi, and Y. Inoue, "A fixed-point homotopy method for solving modified nodal equations," IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol.46, no.6, pp.654-665, June. 1999.
- [8] Y. Inoue and K. Yamamura, "Practical algorithms for dc operating-point analysis of large-scale circuits," Proc. 1995 Int. Symp. Nonlinear Theory and its Applications, pp.1153-1158, Las Vegas, Nevada, Dec. 1995.
- [9] W. Kuroki, K. Yamamura and S. Furuki, "An efficient variable gain homotopy method using the SPICE-oriented approach," IEEE Trans. Circuits Syst. II, Express Briefs, vol.7 pp.621-625, July 2007.
- [10] 有本 卓, "情報理論," 共立出版株式会社, Feb. 1976.

研究業績

- [1] K. Yamamura and K. Adachi, "A modified predictor-corrector method for tracing solution curves," Proc. IEEE Asia Pacific Conference on Circuits and Systems, pp.372-375, Jeju, Korea, Oct. 2016. [2016 IEEE APCCAS Best Paper Award 受賞]