整数計画ソルバーSCIP を用いた区分的線形回路の特性解析

Characteristic Analysis of Piecewise-Linear Circuits Using the Integer Programming Solver SCIP

電気電子情報通信工学専攻　香川　智紀
Tomoki　KAGAWA

1. まえがき

直流回路に対する駆動点特性曲線や伝達特性曲線などの特性曲線を求める効率的かつ実用的な方法を確立することは，回路の性質を調べる上で重要な問題の一つである．この問題に対し，非線形抵抗回路のすべての特性曲線を求める方法がいくつか提案されているが，これらのアルゴリズムは実装の際に高度な専門知識と複雑なプログラミングを必要とするものだった [1] ～[5]．そのため，すべての特性曲線を簡単に求めるためには，複雑なプログラミングをすることなく，簡単に実装できる方法が必要となる．

ところで近年，整数計画法の急速な発展により，CPLEX [6], SCIP [7] など高性能な商用，非商用の整数計画ソルバーが開発されている．整数計画法は本質的に難しい（NP 困難と呼ばれている）問題のクラスに属するため，少し前までは実用規模の問題を解くことは不可能とされていた．しかし最先端のアルゴリズムを実装した整数計画ソルバーを用いることにより，これまでは決して解けないとされていた実用規模の問題を解くことが可能となっている．

本研究室ではこのような整数計画法の発展を背景に，これらの整数計画ソルバーを用いた，区分的線形回路のすべての直流動作点を求める実装容易な方法が提案された [8]．さらに，この方法を拡張し，上記の CPLEX を用いた区分的線形回路のすべての特性曲線を求める効率的な方法が提案された [9]．CPLEX は数ある整数計画法のソフトウェアの中でも最も効率的なソフトウェアの一つとして知られており，無償のアカデミック版が存在するため，商用目的でない研究者や学生ならば無償で利用することができる．しかし，非アカデミックユーザーには高価であることから，簡単に利用することができない．一方，SCIP は非商用で無償の整数計画ソルバーとしてはトップクラスの性能を持つソルバーとして知られている．

本論文では，最も高性能な非商用の整数計画ソルバーである SCIP を用いて，実装容易性に優れた区分的線形回路のすべての特性曲線を求める方法を提案する．本手法により，非アカデミックユーザーであっても無償で簡単に特性解析を行うことができる．

2. 整数計画法を用いた区分的線形回路の全解探索法

本章では，文献 [8] で提案された区分的線形抵抗回路のすべての直流動作点を求める方法について説明する．n 個の区分的線形抵抗を含む回路は，一般に次のような形の区分的線形方程式で記述することができる．

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \triangleq \boldsymbol{P}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ は区分的線形抵抗の枝電圧または枝電流を要素とする n 次元変数ベクトル，$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ は回路の構造によって決まる $n \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ は電源の値によって決まる n 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = [g_1(x_1), g_2(x_2), \cdots, g_n(x_n)]^{\mathrm{T}}$ はこれらの抵抗の特性を表す $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への，図 1 に示すような区分的線形関数（ただし各成分は一変数関数）である．式 (1) が線形方程式となるような領域を線形領域と呼ぶことにする．

文献 [8] では，正の補助変数 $\delta_{ij}(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, K)$ と 0–1 変数 $\mu_{ij}(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, K-1)$ を導入することにより，式 (1) を線形

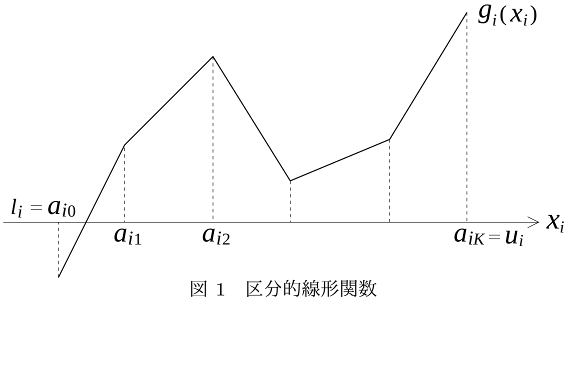

図 1　区分的線形関数

等式と線形不等式で表現できることが示されている．ここで，これらの線形等式・線形不等式の制約のもとで次のようなな混合整数計画問題を考える．

最大化：(任意の定数)

制約条件：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}\\
&x_i = a_{i0} + \sum_{j=1}^{K} \delta_{ij}\\
&y_i = b_{i0} + \sum_{j=1}^{K} \frac{b_{ij} - b_{ij-1}}{a_{ij} - a_{ij-1}} \delta_{ij}\\
&\Delta_{i1}\mu_{i1} \leqq \delta_{i1} \leqq \Delta_{i1}\\
&\qquad \vdots\\
&\Delta_{ij-1}\mu_{ij-1} \leqq \delta_{ij-1} \leqq \Delta_{ij-1}\mu_{ij-2}\\
&\Delta_{ij}\mu_{ij} \leqq \delta_{ij} \leqq \Delta_{ij}\mu_{ij-1}\\
&\Delta_{ij+1}\mu_{ij+1} \leqq \delta_{ij+1} \leqq \Delta_{ij+1}\mu_{ij}\\
&\qquad \vdots\\
&0 \leqq \delta_{iK} \leqq \Delta_{iK}\mu_{iK-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.
\end{aligned} \tag{2}$$

式 (2) の制約条件と式 (1) が等価であることは容易に確認できる．すなわち，式 (2) を満たすすべての解を求めることにより，式 (1) のすべての解を得ることができる．また，制約条件を満たす 0–1 変数 μ_{ij} の組合せと線形領域の間には 1 対 1 対応が存在する．

文献 [8] では，式 (2) を解くための整数計画ソルバーとして，現時点で最も高性能な商用ソフトウェアの一つである CPLEX [6] を用いている．CPLEX を用いることの大きな利点は，CPLEX には解プールという機能があり，この機能を利用することによってより簡単な全解探索が可能になることである．解プール機能とは，混合整数計画問題の制約条件を満たす解を求め，保存する機能である．すなわち，解プール機能を用いることで，混合整数計画問題 (2) を 1 回解くだけですべての解を求めることができる．しかし，CPLEX は非常に高価なものであるため，非アカデミックユーザーは簡単には利用することができなかった．そこで本研究では，非商用で無償の整数計画ソルバー SCIP [7] を用いて，混合整数計画問題 (2) を解くことを考える．しかし，SCIP には解プール機能に近い機能はあるが，解として出力されるのは実行可能な 0–1 変数の組み合わせのみである．そのため，この値に工夫を加える必要がある．

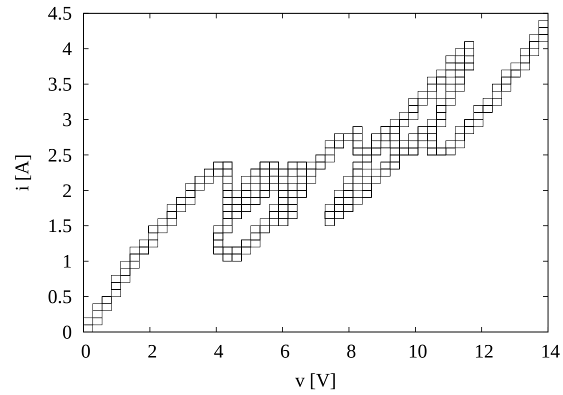

図 2　SCIP の count を適用した場合の解

3. 提案手法

本章では，SCIP を用いて混合整数計画問題 (2) を解くことを考える．直流回路に対する特性曲線を求める問題は，方程式よりも変数の方が一つ多い連立非線形方程式の解曲線を求める問題に帰着される．ここでは簡単のために，n 個の区分的線形抵抗，線形抵抗，線形従属電源，独立電源を含む 1 ポート回路を考える．このとき，ポートの枝電圧，枝電流をそれぞれ v, i とすると，1 ポート回路の回路方程式は一般に次のように表される．

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \triangleq \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} g_1(x_1) \\ \vdots \\ g_n(x_n) \\ i \end{bmatrix} + \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ v \end{bmatrix} - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

ただし，$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ は $(n+1) \times (n+1)$ 定数行列，$(x_1, x_2, \cdots, x_n, v, i)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+2}$ は $(n+2)$ 次元変数ベクトル，$r = (r_1, r_2, \cdots, r_{n+1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ は $(n+1)$ 次元定数ベクトル，$g_i(x_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$ は区分的線形抵抗の素子特性を表す区分的線形関数である．式 (3) は $(n+1)$ 個の区分的線形方程式と $(n+2)$ 個の変数を持つ方程式である．

したがって，変数の数が方程式の数よりも一つ多いことから，式 (3) の解集合は一般に $(n+2)$ 次元空間上の複数個の解曲線となる．本論文では，このような方程式のすべての解曲線を求めることを考える．

式 (3) を，混合整数計画問題 (2) に代入することによって得られる次のような混合整数計画問題を考える．

最大化：(任意の定数)

制約条件：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ i \end{bmatrix} + \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ v \end{bmatrix} - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \\
&x_i = a_{i0} + \sum_{j=1}^{K} \delta_{ij} \\
&y_i = b_{i0} + \sum_{j=1}^{K} \frac{b_{ij} - b_{ij-1}}{a_{ij} - a_{ij-1}} \delta_{ij} \\
&\Delta_{i1}\mu_{i1} \leqq \delta_{i1} \leqq \Delta_{i1} \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\Delta_{ij-1}\mu_{ij-1} \leqq \delta_{ij-1} \leqq \Delta_{ij-1}\mu_{ij-2} \\
&\Delta_{ij}\mu_{ij} \leqq \delta_{ij} \leqq \Delta_{ij}\mu_{ij-1} \\
&\Delta_{ij+1}\mu_{ij+1} \leqq \delta_{ij+1} \leqq \Delta_{ij+1}\mu_{ij} \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&0 \leqq \delta_{iK} \leqq \Delta_{iK}\mu_{iK-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
\tag{4}
$$

混合整数計画問題 (4) の制約条件は，式 (3) と等価であることから，混合整数計画問題 (4) の実行可能領域は複数個の解曲線となる．そのため，この問題の実行可能領域は無限個の解からなる．

次に，混合整数計画問題 (4) を SCIP を用いて解くことを考える．混合整数計画問題 (4) では 0–1 変数 μ_{ij} が整数変数であり，制約条件を満たす一つの μ_{ij} の組み合わせと一つの線形領域は 1 対 1 対応している．また，混合整数計画問題 (4) を SCIP の count 機能を用いて解くと，特性曲線を含むすべての線形領域に対応する μ_{ij} の値の組み合わせを求めることができる．したがって，もし後述の例題 1 の回路を混合整数計画問題に定式化し，SCIP の count 機能を適用すると，図 2 のようにすべての特性曲線を包み込む線形領域の集合を得ることができる．以上，SCIP の count 機能を用いて混合整数計画問題 (4) を解くことで，すべての特性曲線を包み込む線形領域の集合を得ることができた．しかし，SCIP では v や i などの連続変数の値が保存されないため，混合整数計画問題を count 機能を用いて解くだけでは特性曲線を求めることができない．

そこで，特性曲線を含むすべての線形領域で，目的関数を v とし，最大化・最小化をする次のような線形計画問題を解く必要がある．

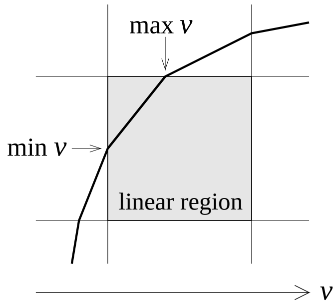

図 3　一つの線形領域上での端点と特性曲線の関係

最大化/最小化：v

制約条件：

$$
\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ i \end{bmatrix} + \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ v \end{bmatrix} - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \tag{5}
$$

ここで，各線形領域上では，混合整数計画問題 (4) の 0–1 変数 μ_{ij} の値が固定され，線形計画問題 (5) の線形計画問題に等価となる．従って，線形計画問題 (5) の実行可能領域は，各線形領域を通る特性曲線に等しくなる．このため，線形計画問題 (5) を最大化で解くことで，特性曲線を含む各線形領域上で目的関数 v が最大となる端点を一つ得ることができる．同様に最小化で解くことで，特性曲線を含む各線形領域上で目的関数 v が最小となる端点を一つ得ることができる．そして，同じ線形領域において求められた二つの端点を結ぶことにより，図 3 のようにその線形領域での特性曲線を求めることができる．よって，同様のことを特性曲線が通過するすべての線形領域で行うことにより，すべての特性曲線を求めることができる．

4. 数　値　例

本章ではいくつかの数値例を示す．本手法を C 言語と SCIP 5.0.0 を用いて，HP Z820 (CPU: Intel Xeon Processor E5-2697 v2 2.70GHz) 上に実装した．

例題 1　文献 [4] で例題 1 として扱っている，三つのトンネルダイオードを含む回路に対し，区分的線形関数の線分量 $K = 50$ として本手法を適用した結果，図 4 に示す特性曲線を得られた．また，計算時間は 0.89 秒であった．この図は上述の説明で出てきた図 2 の各線形領域で線形計画問題を 2 回解き，二つの端点をつなげたものである．この回路の特性曲線は一つのパスと一つのループから構

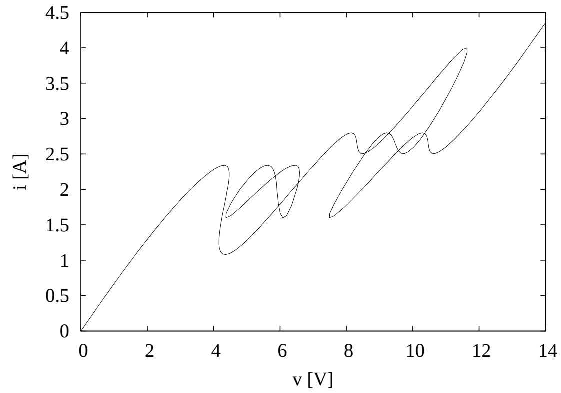

図 4　3 トンネルダイオード回路の特性曲線 ($K = 50$)

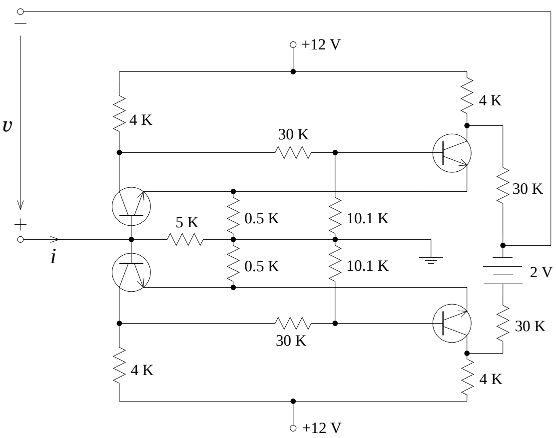

図 5　4 トランジスタ回路

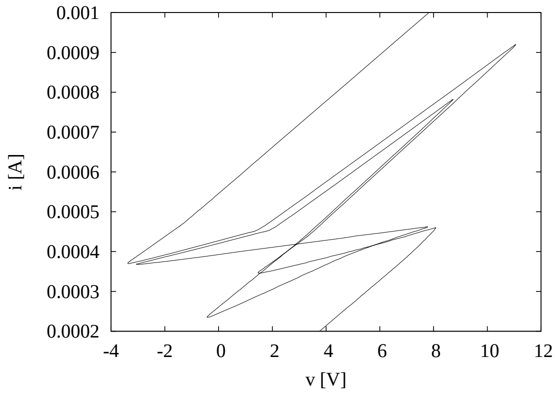

図 6　4 トランジスタ回路の特性曲線 ($K = 30$)

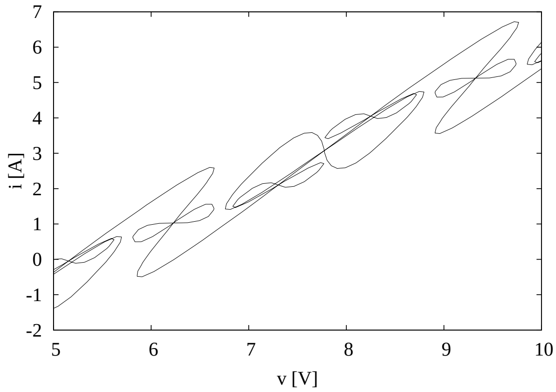

図 7　$n = 10$ トンネルダイオードの特性曲線 ($K = 50$)

成されているが，このように複数の特性曲線が存在する場合でも本手法によりすべて求めることが出来る．

例題 2　図 5 のような四つのトランジスタを含む回路に対し，$K = 30$ として本手法を適用した結果，図 6 に示す特性曲線を得られた．また，計算時間は 9.36 秒であった．この回路の特性曲線も一つのパスと一つのループから構成されている．また，非線形性が強い曲線となっているが，本手法によりすべての特性曲線を求めることができる．

例題 3　文献 [4] で例題 2 として扱っている，n 個のトンネルダイオードを含む回路に対し，$n = 10$, $K = 50$ として本手法を適用した結果，図 7 に示す特性曲線を得られた．また，計算時間は 73.00 秒であった．この回路は複数のループとパスが含まれる非常に複雑な形状の特性曲線となることがわかる．

参 考 文 献

[1] L. Vandenberghe, B. De Moor, and J. Vandewalle, "The generalized linear complementarity problem applied to the complete analysis of resistive piecewise-linear circuits," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.36, no.11, pp.1382–1391, Nov. 1989.

[2] S. Pastore and A. Premoli, "Capturing all branches of any one-port characteristic in piecewise-linear resistive circuits," IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol.43, no.1, pp.26–33, Jan. 1996.

[3] K. Yamamura and T. Ohshima, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using linear programming," IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol.45, pp.434–445, Apr. 1998.

[4] 山村清隆，フィトラグナワン，蓬田幸二，"線形計画法を用いた非線形抵抗回路の特性曲線の探索，" 信学論 (A), vol.J83-A, no.6, pp.761–770, June 2000.

[5] K. Yamamura and S. Tanaka, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using the dual simplex method," Int. J. Circuit Theory Appl., vol.30, no.6, pp.567–586, Nov. 2002.

[6] IBM, IBM ILOG CPLEX Optimization Studio, CPLEX User's Manual,Version 12, Release 7, `https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P_12.7.0/ilog.odms.studio.help/pdf/usrcplex.pdf`

[7] SCIP (Solving Constraint Integer Programs)，`http://scip.zib.de/`

[8] K. Yamamura and N. Tamura, "Finding all solutions of separablesystems of piecewise-linear equations using integer programming," J.Computational and Applied Mathematics, vol.236, issue 11, pp.2844–2852, May 2012.

[9] K. Yamamura, S. Ishiguro, and H. Taki, "Characteristic analysis and tolerance analysis of nonlinear resistive circuits using integer programming," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E99-A, 2016.