整数計画法を用いた非線形回路のすべての周期解の計算法

Finding All Periodic Solutions of Nonlinear Circuits Using Integer Programming

電気電子情報通信工学専攻　白石　哲也
Tetsuya　SHIRAISHI

1. まえがき

周期的な強制入力を持つ非線形回路の周期解を求めることは，電子回路設計における重要な問題の一つである．周期解を求めるには，ある時刻とその一周期後の応答が等しくなるまで過渡解析を行う．しかし，周期解に到達するまでに非常に長い時間を必要とするような回路の場合では解析が困難となる．そこで，周期解を効率良く解析する方法が提案され，そのうちの一つとして，与えられた振動系の初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ とその一周期後の値 $\boldsymbol{x}(T)$ に着目し，$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}(T)$ を満足する解を Newton 法を適用して探索する方法である shooting 法がよく知られている [1]～ [6].

shooting 法は現在最もよく使われている周期解探索法の一つとなっているが，収束性が悪く，初期値によっては収束しないこともしばしばある．非線形回路では複数の周期解が存在することがある．特にカオスの分野では多くの周期解が存在すると知られており，周期解を探索することは現象を理解するうえで大切となる．しかし一つの周期解を求めることでさえ困難となることもあるため，すべての周期解を求める方法の研究は行われてこなかった．

一方，本研究室では整数計画法を用いて全解探索問題を対象とする研究を行っている．整数計画法は近年急速に発展し，CPLEX [7], SCIP [8] といった商用・非商用の整数計画ソルバーが開発されている．整数計画問題は本質的に難しい（NP 困難と呼ばれる）問題のクラスに属するため，少し前までは実用規模の問題を解くことは不可能とされていた．しかし，これらの整数計画ソルバーを用いることで大規模な整数計画問題を実用的な計算時間で解けるようになっている．

そこで本論文では，これまで本研究室が着目してきた整数計画法を用いて非線形回路のすべての周期解を求める方法を提案する．本手法は，複雑なプログラミングを必要とせず，簡単にすべての周期解を求めることができる．

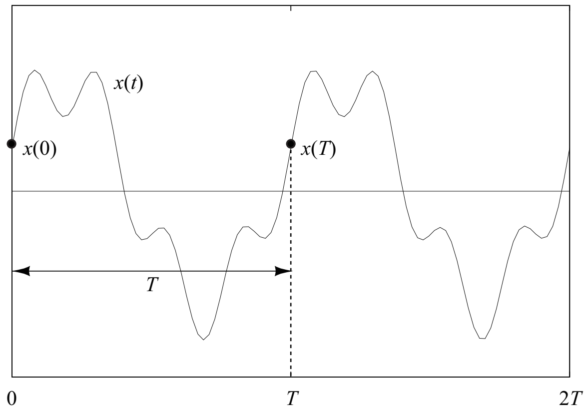


図 1　周期解の概略図

2. 準　　備

2.1 shooting 法による周期解の計算法

本節では，文献 [1] で提案された shooting 法による周期解の計算法について説明する．

次式で表される非線形強制振動系を考える．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), t) \tag{1}$$

但し，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}$ は n 次元ベクトル，$\boldsymbol{f}$ は時間 t について周期 T の周期関数とする．

周期解とは，図 1 のような，初期値と一周期後の値が等しい状態である．従って周期解を求める問題は，境界条件

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}(T) \tag{2}$$

のもとで式 (1) の解を求める非線形二点境界値問題に帰着される．

今，初期値を $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ とすると，一周期後の式 (1) の解は

$$\boldsymbol{x}(T; \boldsymbol{x}_0) = \int_0^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0), t)dt + \boldsymbol{x}_0 \tag{3}$$

となる．ここで式 (3) を $\boldsymbol{x}_0$ の関数と考え，写像 $\boldsymbol{F}$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0) = \int_0^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0), t)dt + \boldsymbol{x}_0 \tag{4}$$

このとき，式 (2) は次のように書き換えられる．

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0) \tag{5}$$

従って式 (5) を満足するような初期値 $\boldsymbol{x}_0$ を Newton 法で探索することにより，式 (1) の周期解を求めることができる．このとき，Newton 法の各ステップにおける関数 $\boldsymbol{F}$ の計算は式 (1) を一周期区間数値積分することにより行われる．

2.2 整数計画法を用いた全解探索法

本節では，文献 [9] で提案された区分的線形抵抗回路のすべての解（直流動作点）を求める方法について説明する．n 個の区分的線形抵抗を含む抵抗回路は，一般に次のような形の区分的線形方程式で記述することができる．

$$f(x) \triangleq Pg(x) + Qx - r = 0 \tag{6}$$

ただし，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ は区分的線形抵抗の枝電圧または枝電流を要素とする変数ベクトル，P, Q は回路の構造によって決まる $n \times n$ 定数行列，r は定数ベクトル，$g(x) = [g_1(x_1), g_2(x_2), \cdots, g_n(x_n)]^T$ は区分的線形関数である．式 (6) が線形方程式となるような領域を線形領域と呼ぶことにする．

文献 [9] では，連続変数 $\lambda_{ij}(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 0, 1, \cdots, K)$ と 0–1 変数 $\mu_{ij}(i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, K)$ と補助変数 $y_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ を導入し，$y_i = g_i(x_i)$ とおくと，式 (6) を線形等式と線形不等式で表現できることが示されている．ここで，これらの線形等式・線形不等式の制約のもとで次のような混合整数計画問題を考える．

最大化：（任意の定数）

制約条件：

$$\begin{aligned}
&Py + Qx - r = 0 \\
&x_i = \sum_{j=0}^{K} a_{ij}\lambda_{ij} \\
&y_i = \sum_{j=0}^{K} g_i(a_{ij})\lambda_{ij} \\
&\sum_{j=0}^{K} \lambda_{ij} = 1 \\
&\sum_{j=1}^{K} \mu_{ij} = 1 \\
&\lambda_{i0} \leqq \mu_{i1} \\
&\lambda_{i1} \leqq \mu_{i1} + \mu_{i2} \\
&\quad \vdots \\
&\lambda_{iK-1} \leqq \mu_{iK-1} + \mu_{iK} \\
&\lambda_{iK} \leqq \mu_{iK}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned} \tag{7}$$

式 (7) の制約条件と式 (6) が等価であることは容易に確認できる．すなわち，式 (7) を満たすすべての解を求めることにより，式 (6) のすべての解を得ることができる．また，制約条件を満たす 0–1 変数 μ_{ij} の組合せと線形領域の間には一対一対応が存在する．

文献 [9] では，式 (7) を解くための整数計画ソルバーとして，現時点で最も高速な商用ソフトウェアの一つである CPLEX [7] を用いている．CPLEX を用いることの大きな利点は，CPLEX には解プールという機能があり，この機能を利用することによってより簡単な全解探索が可能になることである．解プールとは，混合整数計画問題の制約条件を満たす解を求め，保存する機能である．すなわち，解プールの機能を用いることで，混合整数計画問題 (7) を一回解くだけですべての解を求めることができる．

本研究室では整数計画法を用いて，様々な非線形回路の全解探索問題に対する整数計画ソルバーの応用に関する研究を行っている．これらの研究では整数計画ソルバーを用いることにより，複雑なプログラミングを必要とすることなくすべての解を求めることができる方法を提案している．

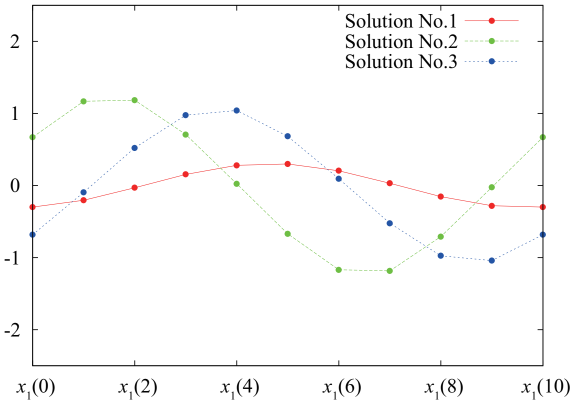
3. 提 案 手 法

周期解の計算法としては shooting 法がよく使われているが，shooting 法では Newton 法を用いていることから収束性が悪く，初期値によっては収束しないこともしばしばある．非線形電気・電子回路には，複数個の周期解が存在することがある．そのような場合ではすべての周期解を求めることが重要となるが，従来の方法では一つの周期解を求めることでさえ困難となることがあった．従って，すべての周期解を求める研究は行われてこなかった．

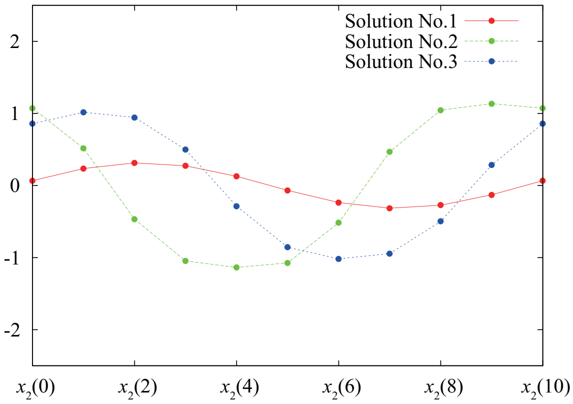
そこで本研究では，近年着目されている整数計画法を用いた全解探索問題に対する研究を周期解の計算法に応用することによって，すべての周期解を求める方法を提案する．

まず，式 (1) に数値積分公式を用いることを考える．数値積分公式としては，台形法が安定性や簡易性などの理由からしばしば用いられる．本研究でも台形法を用いた場合を考える．

ここで簡単のため，時間刻みの幅として一周期区間を m 等分した共通の値 $h \triangleq \dfrac{T}{m}$ とする．$t_i = ih$ とおき，$\boldsymbol{x}(t)$ の近似解を $\boldsymbol{x}_i$ で表すと，台形法による数値積分公式は次

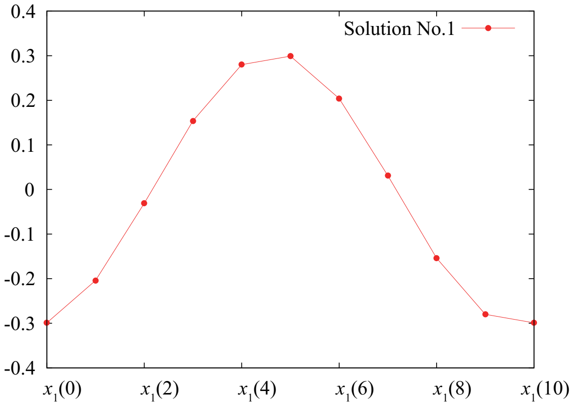


(a)　x_1 の結果

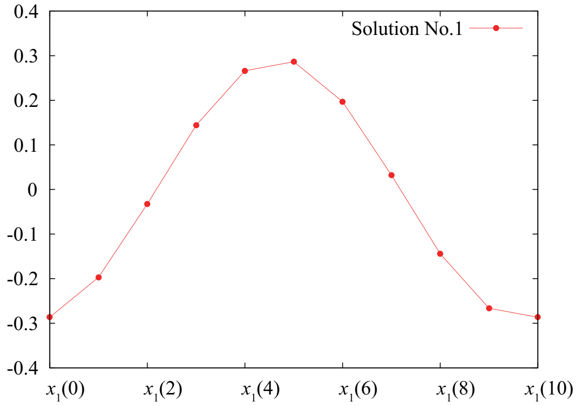


(b)　x_2 の結果

図 2　例 1 の解析結果



(a)　提案手法



(b)　shooting 法

図 3　提案手法と shooting 法の解析結果

のようになる．

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_{i-1} + \frac{h}{2}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i, t_i) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{i-1}, t_{i-1})] \qquad i = 1, 2, \cdots, m \tag{8}$$

ここでもし $\boldsymbol{x}_i (0 \leqq i \leqq m)$ が式 (1) の周期解の近似であるならば，$\boldsymbol{x}_i$ は式 (8) を満たすと同時に，次式を満足しなければならない．

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_m \tag{9}$$

したがって，式 (1) の周期解を求める問題は，$\boldsymbol{x}_i (0 \leqq i \leqq m)$ を変数とする非線形方程式系

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_{i-1} + \frac{h}{2}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i, t_i) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{i-1}, t_{i-1})] \\ &\qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, m \\ &\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_m \end{aligned} \tag{10}$$

の求解問題に帰着させることができる．このとき式 (10) は非線形連立方程式であることが分かる．ここで式 (8) に含まれる非線形関数を区分的線形化し，$g_i(\boldsymbol{x}_i)$ とおくと，周期解問題である式 (10) は次のような区分的線形方程式で記述することができる．

$$f(\boldsymbol{x}) \triangleq P \begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots \\ g_{m+1}(\boldsymbol{x}_m) \end{bmatrix} + Q \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_m \end{bmatrix} - r = 0 \tag{11}$$

ただし，P, Q は回路の構造によって決まる定数行列，r は定数ベクトルである．式 (11) は区分的線形方程式であることから，式 (7) と同様に混合整数計画問題を考えることができる．そして，その混合整数計画問題を CPLEX で解くことにより，すべての周期解を求めることができる．

本手法では数理最適化ソルバーである CPLEX を用いて解析を行うことにより，複雑なプログラミングを必要とせず，混合整数計画問題を一度解くだけですべての周期解を求めることができる．そのため，周期解が複数ある場合でも簡単に求めることができる方法となっている．

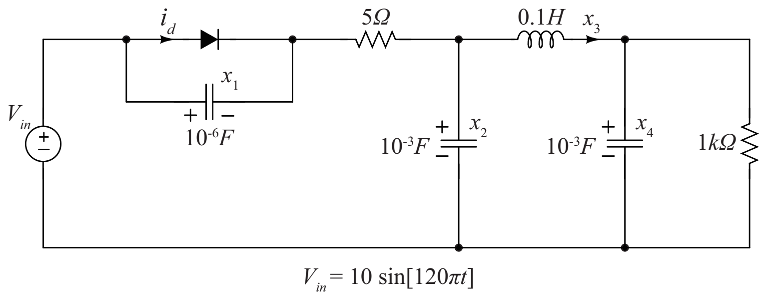


図 4　半波整流形電源回路

表 1　計算結果 (例 1)

	Solution No.1	Solution No.2	Solution No.3
$x_1(0)$	-0.299043	0.670422	-0.682499
$x_2(0)$	0.066741	1.072908	0.857157

表 2　計算結果 (例 2)

	Solution No.1
$x_1(0)$	-8.984950
$x_2(0)$	8.971026
$x_3(0)$	0.008863
$x_4(0)$	9.016165

4. 数　値　例

本章ではいくつかの数値例を示す．本手法を CPLEX ver12.6.1 を用いて HP Z820(CPU: Intel Xeon Processor E5-2697 v2 (30M Cache, 2.70GHz)) 上に実装した．

例 1:　文献 [1] や文献 [6] で解かれている Duffing の方程式

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -0.2x_2 - {x_1}^3 + \cos t$$

に対し，一周期区間の分割数を $m = 10$，区分的線形関数の分割数を $K = 30$ として本手法を適用した結果を表 1，図 2 に示す．また，既存手法である shooting 法と提案手法との比較として x_1 の Solution No.1 のみを描画したものを図 3 に示す．計算時間は 20.5 秒であった．

表 1 と図 2 より，本手法によって 3 つの周期解の初期点を求めていることが分かる．また，図 3 より，既存手法と比べて同じ結果を求められていることが分かる．なお，図 3 に示していない解も文献 [1] に示されている周期解の初期点と一致する．従って，本手法によりすべての周期解を求められることが分かる．

例 2:　文献 [4] で例題として解かれている図 4 の回路に対し，$m = 10$, $K = 10$ として本手法を適用した結果を表 2 に示す．計算時間は 0.1 秒であった．表 2 より，回路に対しても周期解を求められていることが分かる．

5. む　す　び

本論文では，整数計画法を用いた非線形回路のすべての周期解の計算法を提案した．本手法を適用することにより，混合整数計画問題を一回解くだけですべての周期解を求めることができる．また，整数計画ソルバーを利用しているため，複雑なプログラミングを必要とせず，実装が容易となっている．

今後の課題としては，自励振動系の問題に対して適用することが考えられる．

参 考 文 献

[1] T.J. Aprille and T.N. Trick, “Steady-state analysis of nonlinear circuits with periodic inputs,” Proc. IEEE, vol.60, no.1, pp.108–114, Jan. 1972.

[2] L.O. Chua and P.M. Lin, Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[3] 牛田明夫，田中　衛，電子回路シミュレーション，コロナ社，東京，2002.

[4] 山村清隆，堀内和夫，“反復分解法による非線形振動回路の定常解析,” 信学論（A），vol.J68-A, no.8, pp.717–724, Aug. 1985.

[5] 山村清隆，堀内和夫，“非線形振動回路の定常解析における Newton 法について,” 信学論（A），vol.J70-A, no.1, pp.54–64, Jan. 1987.

[6] 山村清隆，堀内和夫，“非線形系における周期解の精密計算法について,” 信学論（A），vol.J70-A, no.11, pp.1568–1575, Nov. 1987.

[7] IBM, IBM ILOG CPLEX Optimization Studio, CPLEX User’s Manual, Version 12, Release 8, https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P_12.8.0/ilog.odms.studio.help/pdf/usrcplex.pdf

[8] SCIP (Solving Constraint Integer Programs), http://scip.zib.de/

[9] K. Yamamura and N. Tamura, “Finding all solutions of separable systems of piecewise-linear equations using integer programming,” J. Computational and Applied Mathematics, vol.236, issue 11, pp.2844–2852, May 2012.

研 究 業 績

[1] T. Shiraishi, S. Ishiguro, and K. Yamamura, “Characteristic analysis of piecewise-linear resistive circuits using SCIP,” Proc. 2015 IEEE Workshop on Nonlinear Circuit Networks, pp.34–37, Tokushima, Japan, Dec. 2015.