修士論文要旨 (2017 年度)

関数の線形成分を分離する手法を用いた非線形抵抗回路の全解探索法

Finding All Solutions of Nonlinear Circuits Using a Technique for Separating Linear Components of Nonlinear Functions

電気電子情報通信工学専攻　寺谷　和輝
Kazuki　TERAYA

1. まえがき

非線形回路のすべての解（直流動作点）を求める効率的なアルゴリズムを確立することは，信頼性の高い回路設計を行ううえで重要な課題となる．この問題は回路に含まれる非線形素子の数 n の増加とともに計算時間が指数関数的に増大する，非常に難しい問題として知られている．この問題については，文献 [1]〜[12] などで様々なアルゴリズムが提案されてきた．これら多くの従来法は，区間解析の考えに基づいている．

区間解析では,「与えられた領域に解が存在しない」ことを判定する強力な解の非存在判定テストを導入することが，計算効率を決定する最大要因となる．そのようなテストとして LP テストが知られている [3]〜[5]．LP テストとは，非線形関数を多角形で囲むことにより非線形方程式を線形計画問題に置き換え，それに単体法あるいは双対単体法を適用することにより，与えられた領域における解の非存在を判定する方法である．

一般に LP テストは非線形関数を囲む多角形の面積が小さいほど解の非存在判定能力が強くなる．本論文では，非線形関数から線形成分を分離し長方形で囲む面積を小さくすることにより，非線形回路のすべての解を求める効率的なアルゴリズムを提案する．

2. 基本となるアルゴリズム

n 個の非線形抵抗を含む直流回路は，一般に次のような形の非線形方程式で記述することができる．

$$f(x) \triangleq Pg(x) + Qx - r = 0 \tag{1}$$

ただし，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ は非線形抵抗の枝電圧または枝電流を要素とする n 次元変数ベクトル，$g(x) = [g_1(x_1), g_2(x_2), \cdots, g_n(x_n)]^T$ はこれらの抵抗の特性を表す $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への非線形関数，P, Q は $n \times n$ 定数行列，r は n 次元定数ベクトルである．式 (1) のような形の方程式を混合方程式という．

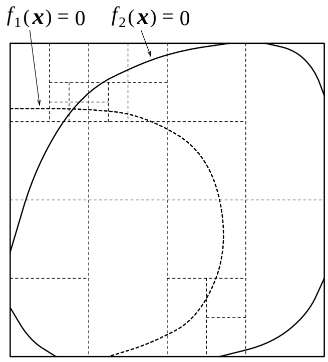

図 1　区間解析における領域分割

線形計画法を用いるアルゴリズムでは，n 次元直方体で与えられた初期領域を各変数方向に再帰的に 2 分割しながら，その領域内に解が存在するか否かを確認していく．そして「解の存在と一意性」に関する十分条件が成立した場合はその解を求め,「解の非存在」に関する十分条件が成立した場合はその領域を除去する．また，それらいずれの十分条件も成立しない場合はその領域を 2 分割し，それぞれに対して同様の手順を繰り返す．

以下では，x_i 軸上の閉区間 $[a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を要素とする n 次元区間ベクトルを $X = ([a_1, b_1], \cdots, [a_n, b_n])^T$ で表すことにする．幾何学的には，X は n 次元直方体となる．

定義域 $[a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ における非線形関数 $g_i(x_i)$ の最小値と最大値をそれぞれ c_i, d_i とする．ここで式 (1) を線形等式と線形不等式で表すため，補助変数 y_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を導入し，$y_i = g_i(x_i)$ とおく．このとき，$a_i \leqq x_i \leqq b_i$ ならば $c_i \leqq y_i \leqq d_i$ となる．そしてこ

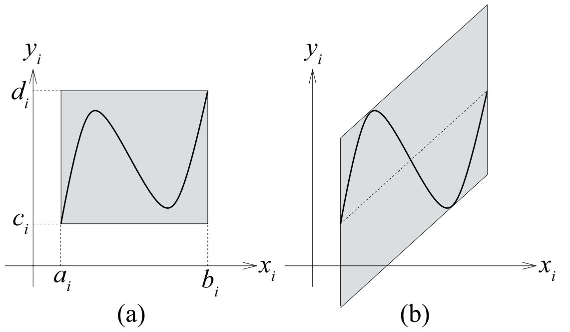

図 2　平行四辺形が非効率的となる例

れらの線形等式・線形不等式を制約条件とする次のような線形計画問題を考える．

最大化：任意の定数

制約条件：

$$
\begin{aligned}
&Py + Qx - r = 0 && (2)\\
&a_i \leqq x_i \leqq b_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n &&\\
&c_i \leqq y_i \leqq d_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n &&
\end{aligned}
$$

ただし，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ とする．幾何学的には，式 (2) の不等式制約は図 1(a) に示すように非線形関数 $g_i(x_i)$ を長方形で囲むことを意味する．明らかに式 (1) の領域 X 内の解は，$y_i = g_i(x_i)$ とおくことにより式 (2) の制約条件を満足する．したがって式 (2) の実行可能領域が存在するか否かは，式 (2) に単体法を適用することにより確認できる．もし存在しなければ，領域 X に式 (1) の解は存在しないので，それを除去することができる．このようなテストを LP テストと呼ぶ．

また文献 [7], [8] では，双対単体法の導入により LP テストにおけるピボット演算回数を激減させる手法が提案されている．この方法は既に得られている実行可能タブロー（最適タブロー）から次の領域用の双対実行可能タブローを導き，そこから双対単体法をスタートさせるもので，1 領域当りの平均ピボット演算回数が非常に少なくなる．

一般に LP テストは非線形関数を囲む多角形の面積が小さいほど領域除去能力が強くなる．非線形関数を囲む多角形としては通常長方形が用いられるが，関数の非線形性の弱い部分では長方形の面積が相対的に大きくなり，非効率的となる欠点がある．

これに対し，文献 [12] では非線形関数を平行四辺形で囲む LP テストが提案されている．この方法は関数の非線形性が弱い問題に対しては効率的であるが，関数の非線形性が強い部分では図 1(b) に示すように平行四辺形の面積が長方形以上に大きくなるため，しばしば非効率的となる．

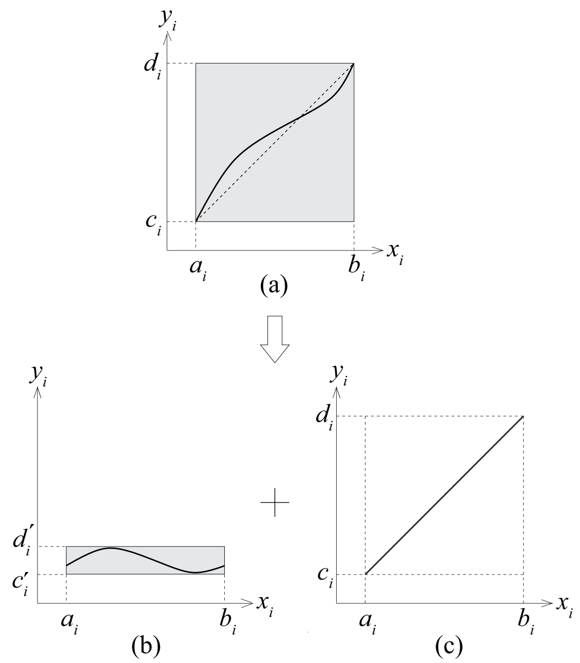

図 3　関数の線形成分を分離し，非線形成分をより小さな長方形で囲む例

3. 提案アルゴリズム

本論文では，図 3 に示すように非線形関数から線形成分を分離する方法を利用し，従来法に比べてより小さい長方形で非線形関数を囲む手法を提案する．更に，LP テストに適用する工夫を記述する．また，双対単体法への適用方法に関しても考察する．

3.1 非線形関数から線形成分を分離する方法

いま，図 3(a) のような非線形関数 $g_i(x_i)$ の場合について考える．提案手法では，まず $g(x)$ を二つの関数 $g_i(x_i) - \{\frac{d_i - c_i}{b_i - a_i}(x_i - a_i) + c_i\}$ と $\frac{d_i - c_i}{b_i - a_i}(x_i - a_i) + c_i$ の和の状態であると考える．そして $g_i(x_i) - \{\frac{d_i - c_i}{b_i - a_i}(x_i - a_i) + c_i\}$ を新たな非線形関数 $g_i'(x_i)$ とおくと，

$$
g_i(x_i) = g_i'(x_i) + \{\frac{d_i - c_i}{b_i - a_i}(x_i - a_i) + c_i\} \qquad (3)
$$

になる．これは，図 3(b), (c) に示すように $g_i(x_i)$ を非線形関数 $g_i'(x_i)$ と線形成分である $\frac{d_i - c_i}{b_i - a_i}(x_i - a_i) + c_i$ に分離することになる．ここで，$g_i'(x_i)$ を長方形で囲むことで図 3(b) のように小さい長方形で囲むことが可能になる．

3.2 LP テストへの適用方法

提案手法をLPテストへの適用に関しては，混合方程式の記述の仕方に工夫を加えることで実現できる．一つ目の関数 $g_i(x_i) - \{\frac{d_i-c_i}{b_i-a_i}(x_i - a_i) + c_i\}$ を長方形で囲む非線形関数 $g'_i(x_i)$ とし，二つ目の関数 $\frac{d_i-c_i}{b_i-a_i}(x_i - a_i) + c_i$ を式 (1) の線形項 $Qx - r$ に組み込み $Q'x - r'$ とおく．提案手法を適用した線形計画問題は以下のようになる．

最大化： 任意の定数

制約条件：

$$
\begin{aligned}
& Py' + Q'x - r' = 0 && && (4)\\
& a_i \leqq x_i \leqq b_i, && i = 1, 2, \cdots, n \\
& c'_i \leqq y'_i \leqq d'_i, && i = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

ただし，c'_i, d'_i はそれぞれ定義域 $[a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ における非線形関数 $g'_i(x_i)$ の最小値と最大値とする．また，補助変数 y'_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を導入し，$y'_i = g'_i(x_i)$ とおく．このとき，$a_i \leqq x_i \leqq b_i$ ならば $c'_i \leqq y'_i \leqq d'_i$ となる．幾何学的に本手法を適用した式 (4) の不等式制約は図 3(b) に示すように，非線形関数をより小さな長方形で囲むことが出来る．したがって，LP テストの非存在判定能力がより強力になる．

3.3 双対単体法への適用方法

また，本手法における双対単体法の適用についても考える．本手法を適用すると，式 (1) における行列 Q の値すなわち変数 x の係数が各領域で変化するため，従来の変数変換が使えなくなる．そこで，感度分析という線形計画法の分野で発展を遂げている概念を用いることで解決することを考える．

感度分析とは，ある線形計画問題の最適解が得られたとき，問題の定数や係数 (LHS) などを変更した場合，最適タブローにどのような影響をあたえるか，また変化への対応方法などが示されている．すなわち感度分析の概念を用いて行列 Q の値が変化する場合も，次の領域用の双対実行可能タブローを導くことで双対単体法が適用可能になると考えられる．

4. 数　値　例

本章では数値実験結果をいくつか示し，提案したアルゴリズムの有効性を検証する．使用計算機は HP Z440 (CPU: Intel Xeon 3.7GHz)，プログラミング言語は C（倍精度）である．また，単体法のみの実装となっている．

表 1　計算結果（例 1）

	探索領域数	総ピボット回数	計算時間（秒）
文献 [3]	504 585	27 116 189	549.13
本手法	81 363	4 459 953	89.95

表 2　計算結果（例 2）

n	S	T_1 (s)	T_2 (s)
10	3	0.11	0.06
20	3	1.42	0.66
30	3	8.65	3.73
40	3	39	17
50	3	124	49
60	3	263	101
70	3	552	232
80	3	1462	436
90	3	1860	725
100	3	3057	1213

例 1:　まず，Bratu 問題と呼ばれる非線形二点境界値問題を記述する n 変数の非線形方程式を考える．

$$x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} + h^2 \exp(x_i) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

ここで，$x_0 = x_{n+1} = 0$，$h = 1/(n+1)$ とする．ただし初期領域は $([-10, 10], \cdots, [-10, 10])^T$ とした．$n = 40$ として文献 [3] のアルゴリズムと本手法を適用したときの探索領域数，総ピボット演算回数，計算時間を表 1 に示す．文献 [3] は長方形を用いた LP テストアルゴリズムである．得られた解の個数はともに 2 個であった．この表より，アルゴリズム全体で小さな長方形が使用されるため，文献 [3] の方法よりも探索領域数が少なくなり，併せて計算時間の短縮が実現されていることがわかる．

例 2:　まず，次のような n 変数の非線形方程式を考える．

$$2nx_i - (\sum_{j=1}^{n} x_j^3 + i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

ただし初期領域は $([-10, 10], \cdots, [-10, 10])^T$ とし，変数の値を $n = 10$ から $n = 100$ へと変えながら計測した結果を表 2 に示す，ここで S はアルゴリズムで得られた解の個数，T_1 は文献 [3] の従来の長方形 LP テストアルゴリズムの計算時間，T_2 は提案手法の計算時間を示す．得られた解の個数はすべての n に対して 3 個であった．この

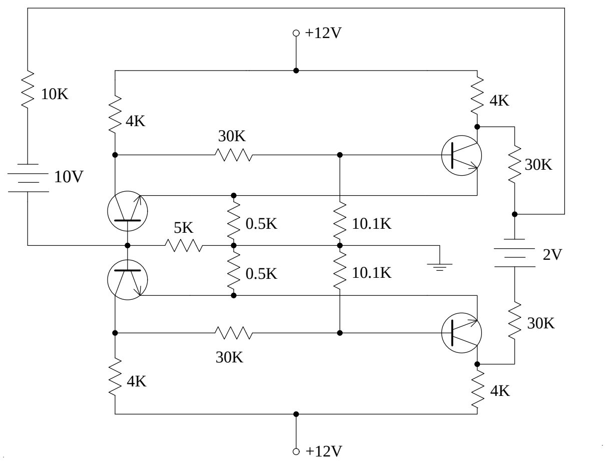

図 4　回路例 1

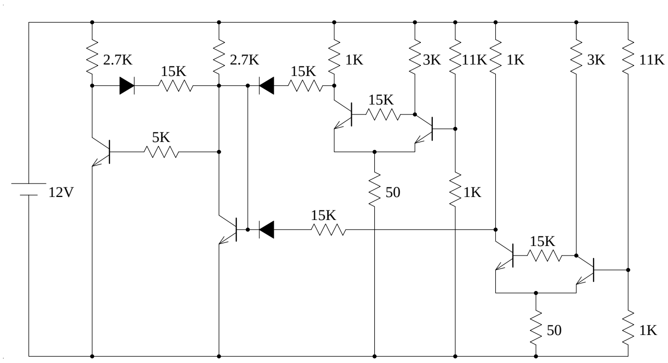

図 5　回路例 2

表より，提案手法は従来法よりも 2 倍～3 倍ほど効率的であることがわかる．

例 3: 最後に，文献 [3], [12] で例題として解かれている，図 4 と 5 で示すトランジスタ回路を考える．各トランジスタに Ebers-Moll モデルを用いると，回路はそれぞれ 8 変数と 15 変数の非線形方程式で記述される．ただし初期領域は $([-20, 0.5], \cdots, [-20, 0.5])^T$ とし，また得られた解の個数はそれぞれ，9 個と 11 個であった．表 3 に計算結果を示す．こちらも他の例題と同様，従来法と比べ効率よく全解探索が行えていることが分かる．

5. むすび

本論文では，非線形抵抗回路のすべての解を求める効率のよいアルゴリズムを提案した．提案手法は，非線形関数から線形成分を分離することで，より小さい長方形で囲むことができる．今後の課題としては，本手法に対し双対単体法の適用を行うことがあげられる．

表 3　計算結果（例 3）

トランジスタ回路	n	S	T_1 (s)	T_2 (s)
図 4	8	9	2.54	1.06
図 5	15	11	2.01	1.42

参考文献

[1] L.O. Chua and R.L.P. Ying, “Finding all solutions of piecewise-linear circuits,” Int. J. Circuit Theory Appl., vol.10, no.3, pp.201–229, July 1982.

[2] K. Yamamura and M. Ochiai, “An efficient algorithm for finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits,” IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol.39, no.3, pp.213–221, March 1992.

[3] K. Yamamura, H. Kawata, and A. Tokue, “Interval solution of nonlinear equations using linear programming,” BIT Numerical Mathematics, vol.38, no.1, pp.186–199, March 1998.

[4] K. Yamamura and T. Ohshima, “Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using linear programming,” IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol.45, no.4, pp.434–445, April 1998.

[5] K. Yamamura and K. Yomogita, “Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using an LP test,” IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol.47, no.7, pp.1115–1120, July 2000.

[6] K. Yamamura and Y. Hata, “Finding all solutions of weakly nonlinear equations using linear programming,” IEICE Trans. Fundamentals, vol.E83-A, no.12, pp.2758–2761, Dec. 2000.

[7] K. Yamamura and S. Tanaka, “Finding all solutions of systems of nonlinear equations using the dual simplex method,” BIT Numerical Mathematics, vol.42, no.1, pp.214–230, March 2002.

[8] K. Yamamura and T. Fujioka, “Finding all solutions of nonlinear equations using the dual simplex method,” J. Computational and Applied Mathematics, vol.152, issue 1-2, pp.587–595, March 2003.

[9] 山村清隆，田中克昌，“双対単体法を用いた弱非線形方程式の全解探索法，” 信学論 (A), vol.J88-A, no.7, pp.833–839, July 2005.

[10] K. Yamamura and K. Suda, “An efficient algorithm for finding all solutions of separable systems of nonlinear equations,” BIT Numerical Mathematics, vol.47, no.3, pp.681–691, Sept. 2007.

[11] K. Yamamura, K. Suda, and N. Tamura, “LP narrowing: A new strategy for finding all solutions of nonlinear equations,” Applied Mathematics and Computation, vol.215, issue 1, pp.405–413, Sept. 2009.

[12] 石黒俊，高宮将弘，山村清隆，“平行四辺形 LP テストを用いた非線形回路の全解探索法，” 第 28 回 回路とシステムワークショップ論文集, pp.172–177, Aug. 2015.

研究業績

[1] 寺谷和輝，山村清隆，“直角三角形 LP テストを用いた非線形回路の全解探索法，” 電子情報通信学会技術研究報告, NLP2016-81, pp.91–96, Oct. 2016.