修士論文要旨 (2017 年度)

整数計画法を用いた区分的線形抵抗回路の完全解析に関する研究

Complete Analysis of Piecewise-Linear Resistive Circuits Using Integer Programming

電気電子情報通信工学専攻　渡辺　涼太

Ryota　WATANABE

1. まえがき

区分的線形抵抗回路の解析では，非常に複雑な形状の解集合をもつ回路を扱うことがある．例えば直流動作点が連続かつ非有界となる回路，特性曲線が多角形などの平面を含む回路，解集合が非凸多面体となる回路などである．このような回路は非線形回路の幾何学的性質の研究や変動解析，カオス，ニューラルネットワークなどの研究で頻出する．

例えば，図 1(a) のような区分的線形抵抗 R と理想ダイオードと制御電流源からなる回路を考える [1]．ただし R の電圧-電流特性は図 1(b) で与えられるものとする (注1)．この回路の直流動作点は，図 2 に示すような連続かつ非有界な集合となる．

このような複雑な形状の解集合をもつ回路の全ての解を求めることを，文献 [1] にならって，完全解析 (complete analysis) と呼ぶことにする．完全解析は，SPICE などの既存のシミュレータでは対処することのできない，難しい問題である．これに対し，文献 [1] では区分的線形抵抗回路を一般化線形相補性問題で記述し，それを解くことによって完全解を求める方法が提案されている (注2)．また文献 [2] では，そのような一般化線形相補性問題を解くためのアルゴリズムが提案されている．

文献 [2] のアルゴリズムは 1953 年に Motzkin らが提案した二重記述法 [3] に基づくものである．しかしこの方法は理論が難しいうえに，実装の際にかなり複雑なプログラミングや専門的知識を必要とする．またこの方法はほとんど普及していないため，専用ソルバーも存在しない．更に計算効率の点でも，今のところポジティブな結果は報告されていない．

(注1)：ここで，図 1(b) のような電圧-電流特性をもつ素子が存在するかどうかは考えない．むしろ，そのような素子が発見されたときに即座に対応できるアルゴリズムの研究と考えた方が分かりやすい．

(注2)：文献 [1] は 1990 年の IEEE Trans. Circuits and Systems の Guillemin Cauer Best Paper Award 受賞論文である．

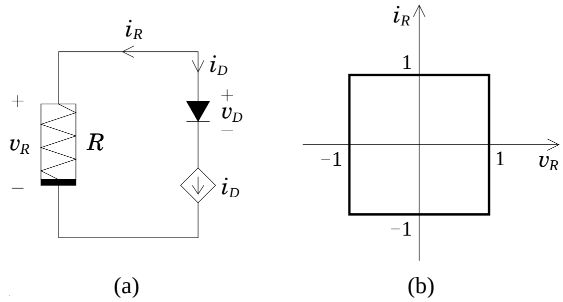

図 1　例 1 の回路と区分的線形抵抗 R の電圧-電流特性

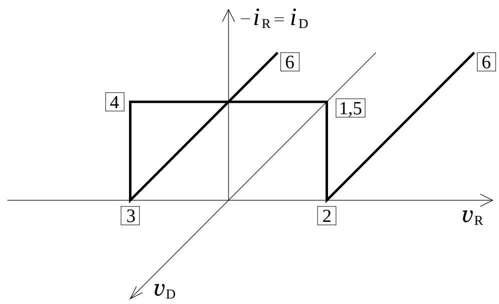

図 2　例 1 の回路の完全解

ところで近年，整数計画法の分野が飛躍的に発展し，少し前までは NP 困難という呪縛から「絶対に」解けないと考えられていた大規模な整数計画問題を実用的な計算時間で解けるようになり，現代社会に大きな影響を与えている．この 20 年間で整数計画ソルバーは（マシンの計算速度の向上も合わせると）平均で約 7 億倍高速になったという報告もある．これは，当時 20 年以上要した計算が 1 秒で終了することを意味する驚異的な数字である．このような強力なソルバーが使えるようになった現在，その適用対象を離散系の最適化問題だけに限定するのは大きな損失である．本研究室では，このような整数計画法の飛躍的な発展に着目し，連続系の問題，特に非線形回路の全解探索問題に関する整数計画法の応用に関する研究を行ってきた [4]．

本論文では，整数計画法を用いた区分的線形抵抗回路の完全解析法を提案する．この方法は実装が容易で，整数計画問題を CPLEX で 2 回解くだけで全ての完全解を簡単に求めることができる．

2. 提案手法のフェーズ I

文献 [1] では，区分的線形抵抗回路の完全解析が次のような形の一般化線形相補性問題に帰着されることが示されている．

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{M}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{q} \cdot \alpha \\ &\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \geqq \boldsymbol{0}, \quad \alpha \in \{0, 1\} \\ &\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{z} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

0-1 変数 α は解集合が非有界となる場合を考慮するために付けられている．なお，一般化線形相補性問題は NP 困難である．

区分的線形抵抗回路がどのようにして式 (1) のような一般化線形相補性問題に定式化されるかは文献 [1] に詳述されているので，本論文では省略する．なお，本論文で扱う電圧-電流特性は電圧制御型でも電流制御型でもないものや定義域が非有界なものも含む．

$n - m = l$ とすると，この回路の解集合は一般に l 次元多面体の集合となる．もし $l = 1$ なら，解集合は区分的線形曲線（折れ線）の集合となり，$l = 2$ なら，解集合は 2 次元多角形の集合となる．

本論文で提案する方法は二つの段階（以下フェーズ I, フェーズ II と呼ぶ）からなる．フェーズ I では，解集合の全ての端点（図 2 の四角番号 1〜6）を求める．フェーズ II では，どの端点とどの端点が隣接しているか（すなわち線分や単体で連結されているか）を調べる．本章ではフェーズ I について説明する．

まず，0-1 変数 u_i, v_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を導入して，式 (1) の相補性条件 $\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{z} = 0$ と非負条件 $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{z} \geqq \boldsymbol{0}$ を次のような線形不等式に置き換える．

$$\begin{aligned} &0 \leqq w_i \leqq L u_i \\ &0 \leqq z_i \leqq L v_i \\ &u_i + v_i \leqq 1 \\ &u_i, v_i \in \{0, 1\}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \tag{2}$$

ここで L は十分に大きな正の定数とする．式 (2) は w_i, z_i のどちらか一方（または両方）が 0 となる相補性条件を表している．ただし，$w_i = 0$, $z_i = 0$ のとき $u_i = 0$, $u_i = 1$ の両方と $v_i = 0$, $v_i = 1$ の両方が式 (2) を満たすため，最終的に得られる解に重複が生じることがある．そこで，制約条件

$$\begin{aligned} &u_i \leqq L w_i \\ &v_i \leqq L z_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \tag{3}$$

を追加し，$w_i = 0$, $z_i = 0$ のときは $u_i = 0$, $v_i = 0$ となるようにしてこのような重複を避ける．

次に，$\alpha = 1$ の場合を考える．このとき式 (1) の解集合は有界となり，その端点は式 (1) の基底解となるので，基底解を表す次のような制約条件を追加する．

$$\sum_{j=1}^{n} (u_j + v_j) \leqq m \tag{4}$$

更に，$\alpha = 0$ の場合を考える．このとき式 (1) の解集合は非有界となり，式 (4) を満たすとは限らない．完全解析では，そのような非有界成分の「方向」を与える端点を求める必要があるが，$\alpha = 0$ の場合に対して CPLEX を適用すると，自明解 $w_i = z_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ しか得られないことがある [5, p.289]．そこで自明解以外の解を求めるため，次のような制約条件を追加する．

$$\sum_{j=1}^{n} (w_j + z_j) \geqq a \tag{5}$$

ただし a は任意の正数である．以下，$a = 1$ とする．

ここで，次のような混合整数計画問題を考える．

最大化 :（任意の定数）

制約条件 :

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{M}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{q} \cdot \alpha \\ &0 \leqq w_i \leqq L u_i \\ &0 \leqq z_i \leqq L v_i \\ &u_i + v_i \leqq 1 \\ &u_i \leqq L w_i \\ &v_i \leqq L z_i \\ &\sum_{j=1}^{n} (u_j + v_j) \leqq m + L(1 - \alpha) \\ &\sum_{j=1}^{n} (w_j + z_j) \geqq 1 - \alpha \\ &u_i, v_i, \alpha \in \{0, 1\}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \tag{6}$$

式 (6) の制約条件は，相補性条件と非負条件を表す式 (2), (3) を含む．また $\alpha = 1$ のときは基底解を表す式 (4) と意

表 1　例題 1 のフェーズ I の解（解集合の端点）

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
w_1	0	0.5	2.5	3	4	0	0	0.2
w_2	0	0	1.5	2	3	0	0	0.2
w_3	0	0	0.5	1	2	0	0	0.2
w_4	0	0	0	0	1	0	0	0.2
w_5	0	0	0	0	0	0	0	0.2
w_6	1	0	0	1	1	0	0	0
z_1	0	0	0	0	0	0	0.2	0
z_2	1	0.5	0	0	0	0	0.2	0
z_3	2	1.5	0	0	0	0	0.2	0
z_4	3	2.5	0.5	0	0	0	0.2	0
z_5	4	3.5	1.5	1	0	0	0.2	0
z_6	0	0	0	0	0	1	0	0
α	1	1	1	1	1	0	0	0

味のない制約式 $\sum_{j=1}^{n}(w_j+z_j)\geqq 0$ を含み，$\alpha=0$ のときは自明解以外の解を求めるための式 (5) と意味のない制約式 $\sum_{j=1}^{n}(u_j+v_j)\leqq m+L$ を含む．したがって式 (6) の制約条件を満たす解は式 (1) の解集合の端点の集合となる．

本論文では，式 (6) を解くための整数計画ソルバーとして，現時点で最も高速な商用ソルバーの一つである IBM ILOG CPLEX [5] を用いる（CPLEX は無料のアカデミック版も提供している）．CPLEX には解プールという機能があり，この機能を用いて混合整数計画問題 (6) を 1 回解くだけで，解集合が点の集合となる問題 ($m=n$) に対してはそれら全ての点を，折れ線，多角形，多面体等の集合となる問題 ($m<n$) に対してはそれらの全ての端点を求めることができる．このことは文献 [6] と同様にして証明することができる．

例 1： 図 1 の回路に提案手法のフェーズ I を適用し，これに解プール機能を用いた CPLEX を適用した結果，表 1 に示すような 8 個の解が得られた．表 1 の解 1〜解 5 は図 2 の解集合の端点 1〜5 を与え，解 6 は図 2 の解集合の非有界成分の方向を与えている．

3.　提案手法のフェーズ II

本章では提案手法のフェーズ II について説明する．

提案手法のフェーズ II では，フェーズ I で得られた端点間の隣接性を判別する．文献 [1] より，cross-complementarity 条件を満たす端点同士は隣接しているので，この条件を調べる．いま，式 (6) を解いた結果 K 個の解（端点）が得られたものとし，その k 番目の解において $w_i>0$ となる添え字の集合を W_k, $z_i>0$ となる添え字の集合を Z_k とする．相補性条件より，全ての k に対し $W_k\cap Z_k=\phi$ が成立する．また W_k, Z_k の要素数を $|W_k|$, $|Z_k|$ で表す．ここで，次のような 0-1 整数計画問題を考える．

最大化 :（任意の定数）

制約条件 :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in W_k}\mu_i+\sum_{i\in Z_k}\nu_i\geqq(|W_k|+|Z_k|)\cdot\rho_k, && k=1,2,\cdots,K\\
&\mu_i+\nu_i\leqq 1, && i=1,2,\cdots,n\\
&\sum_{k=1}^{K}\rho_k=2\\
&\mu_i,\nu_i,\rho_k\in\{0,1\},\quad i=1,2,\cdots,n, && k=1,2,\cdots,K
\end{aligned}\tag{7}$$

この問題の変数 $(\mu_1,\cdots,\mu_n,\nu_1,\cdots,\nu_n,\rho_1,\cdots,\rho_K)^T \in\mathbb{R}^{2n+K}$ は全て 0-1 変数である．ここで式 (7) を解プール機能を用いた CPLEX で解く．これにより式 (7) の全ての解が得られる．もし $\rho_p=1$, $\rho_q=1$ となる解が存在すれば，解 p と解 q は隣接し，存在しなければ，解 p と解 q は隣接しない．証明については割愛する．

例 2： 例 1 で得られた表 1 の 8 個の解に対して式 (7) を解いた結果，端点 1-2, 1-7, 2-6, 3-4, 3-6, 4-5, 5-8, 6-7, 6-8 が隣接していることが分かった．隣接する端点を線分で結ぶことにより，図 2 の完全解が得られた．

以上より提案手法をまとめると，次のようになる．

（1）　**フェーズ I：** 式 (6) を解プール機能を用いた CPLEX で解き，解集合の全ての端点を求める．

（2）　**フェーズ II：** 式 (7) を解プール機能を用いた CPLEX で解き，隣接している端点を線分等で結ぶ．

以下，いくつかの数値例を示す．

なお使用計算機は Hewlett-Packard Z440 (CPU: Intel Xeon Processor E5-1630 v3 3.70GHz) で，整数計画ソルバーとしては CPLEX 12.6.3 を使用した．

例 3： 文献 [1] の図 3 に示すようなトンネルダイオードを直列接続した 1 ポート回路に提案手法を適用した結果，図 3 に示すような駆動点特性が得られた．この回路の駆動点特性は連結してないパスとループからなることが分かる．

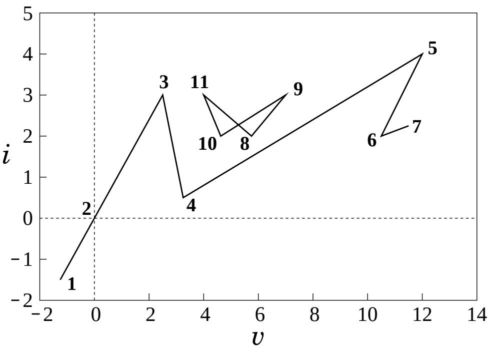

図 3　例 3 の回路の駆動点特性

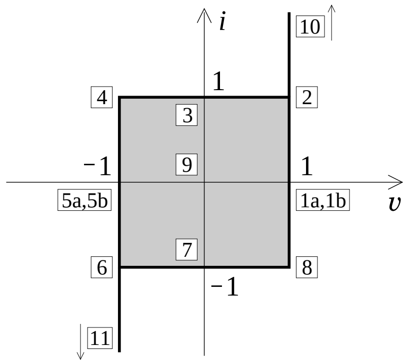

図 4　例 4 の回路の駆動点特性

例 4：　文献 [1] の図 4 に示すような 1 ポート回路に提案手法を適用した結果，図 4 に示すような駆動点特性が得られた．この回路の駆動点特性は有界平面（内部を含む正方形）と二つの非有界直線からなることが分かる．

例 5：　提案手法はより一般的な相補性条件の問題 (B. De Moor の博士論文，p.62, Example 13) の図 5 のような解集合を得ることができる．

なお以上の例題全てに対し，計算時間は 0.1 秒以下であった．

4. むすび

本論文では，整数計画ソルバー CPLEX を用いた区分的線形抵抗回路の完全解を求める簡単な方法を提案した．本手法は実装が容易で，整数計画問題に CPLEX を 2 回適用するだけで全ての解集合を効率良く求めることができる．

参考文献

[1] L. Vandenberghe, B. De Moor, and J. Vandewalle, "The generalized linear complementarity problem applied to the complete analysis of resistive piecewise-linear circuits," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.36, no.11, pp.1382–1391, Nov. 1989.

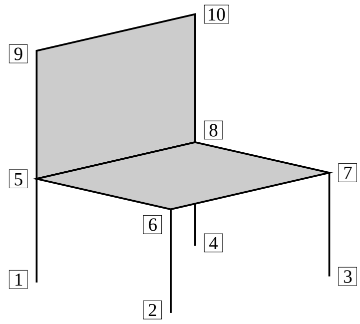

図 5　例 5 の相補性問題の完全解

[2] B. De Moor, L. Vandenberghe, and J. Vandewalle, "The generalized linear complementarity problem and an algorithm to find all its solutions," Mathematical Programming, vol.57, no.1-3, pp.415–426, May 1992.

[3] T. S. Motzkin, H. Raiffa, G. L. Thompson, and R. M. Thrall, "The double description method," Contributions to the Theory of Games, Volume II, Annals of Mathematics Studies, H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Eds. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1953, pp.51–73.

[4] K. Yamamura and N. Tamura, "Finding all solutions of separable systems of piecewise-linear equations using integer programming," J. Computational and Applied Mathematics, vol.236, no.11, pp.2844–2852, May 2012.

[5] IBM, *IBM ILOG CPLEX Optimization Studio, CPLEX User's Manual, Version 12, Release 6*, http://www.ibm.com/support/knowledge center/SSSA5P_12.6.3/ilog.odms.studio.help/pdf/usrcplex.pdf.

[6] K. Yamamura and R. Watanabe, "A simple method for finding all characteristic curves of piecewise-linear resistive circuits using an integer programming solver," Proc. IEEE Asia Pacific Conference on Circuits and Systems, pp.224–227, Jeju, Korea, Oct. 2016.

研究業績

[1] K. Yamamura and R. Watanabe, "A simple method for finding all characteristic curves of piecewise-linear resistive circuits using an integer programming solver," Proc. IEEE Asia Pacific Conference on Circuits and Systems, pp.224–227, Jeju, Korea, Oct. 2016.

[2] K. Yamamura, R. Watanabe, and H. Takahara, "Complete analysis of piecewise-linear resistive circuits using integer programming," Proc. 2016 IEEE Workshop on Nonlinear Circuit Networks, pp.24–27, Dec. 2016.

[3] 高原弘樹，渡辺涼太，山村清隆，"整数計画ソルバーを用いた区分的線形抵抗回路の完全解析," 第 30 回回路とシステムワークショップ論文集, pp.243–248, May 2017.

[4] K. Yamamura and R. Watanabe, "Finding all solution sets of piecewise-linear interval equations using integer programming," Proc. 23rd IEEE European Conference on Circuit Theory and Design, pp.1–4, Catania, Italy, Sep. 2017.

[5] 渡辺涼太，高原弘樹，山村清隆，"整数計画法を用いた区分的線形抵抗回路の完全解析," 電子情報通信学会技術研究報告, vol.117, no.226, NLP2017-51, pp.11–16, Oct. 2017.