3項多期間モデルにおける株式デリバティブの価格付け
Pricing stock derivatives on trinomial multi-period model

経営システム工学専攻　前島　健太郎

1　序論

リスクが存在する場面では，常にそれをヘッジ・移転するニーズが存在する．金融市場では，それに応える仕組みの一つとしてデリバティブがある．このデリバティブの例に，オプションが挙げられる．オプションとは，契約時にあらかじめ設定された価格（行使価格）で原資産（主に株式）を売買する権利を，金融商品として売買できるというものである．また，権利行使が満期時点にしか許されていないものをヨーロピアンオプション，契約時点から満期時点までいつでも権利を行使できるものをアメリカンオプションと呼ぶ．そして，ヨーロピアンオプション（デリバティブ）の価格を計算する一つの離散時間モデルに，2 項モデルがある．

2 項モデルは原資産価格が上昇するか下降するかという単純な動きを繰り返すと仮定し，オプション価格を導出しようというものである．2 項モデルは無裁定を仮定すると完備となる．しかし，無裁定を仮定しても完備とならないモデルも存在し，2 項モデルに価格変動を 1 つ加えた 3 項モデルは非完備であり一般にオプション価格は一意には定まらない．しかし，その価格の上限と下限を求めることができる．

これまでの研究において，非完備市場におけるオプション価格の上限・下限はオプションによっては具体的には計算されていない． 中矢（2013）[1] はあるルックバックオプションの一つのリスク中立価格を計算しているが，これでは上限と下限の間にある中間的な価格を求めたに過ぎず，上限・下限とそれを実現するポートフォリオを求める観点からは不十分である．本論文ではその価格の上限・下限およびそれぞれを与える取引戦略（優複製ポートフォリオ，劣複製ポートフォリオ）を具体的に求めた．

2　1 期間モデル

2.1　モデルの記述

初期時点を $t=0$，最終時点を $t=1$ とし取引はいずれの時点でも可能とする．また，時点 $t=1$ において生起するシナリオの標本空間を

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_K\}\ (\forall\omega\in\Omega;\ P(\{\omega\})>0)$$

とする．ここで，1 期間証券市場モデルを構成する他の要素を以下のように表す．

(1) 銀行預金過程 $\{B_t \,|\, t=0,1\}$
$t=0$ で $B_0=1$ を銀行に預金したときの，$t=1$ における銀行預金の価値を B_1 とする．B_1 は Ω 上の確率変数である（が確定値とすることも多く，本論文では確定値とする）．また，$r=B_1-1(\geqq 0)$ は利率である．

(2) 価格過程 $\left\{\boldsymbol{S}_t = \begin{pmatrix} S_1(t) \\ \vdots \\ S_N(t) \end{pmatrix} \middle|\ t=0,1\right\}$
時点 t における危険証券（多くは株式）n の 1 単位当たりの価格を $S_n(t)\,(n=1,2,\ldots,N)$ とする．$S_n(0)(>0)$ は確定値，$S_n(1)$ は Ω 上の確率変数であり，$\forall\omega\in\Omega;\ S_n(1,\omega)\geqq 0$ が成り立つものとする．

(3) 取引戦略 $\boldsymbol{h} := \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix}$
h_0 : 銀行預金に投じられた金額, $h_n\,(n=1,\ldots,N)$: 有価証券 n の保有単位数とする．また，$h_0<0$ のときは借入れ，$h_n<0$ のときは空売りを意味する．つまり，$\boldsymbol{h}$ は $t=0$ から $t=1$ まで持ち越される投資家のポートフォリオである．

(4) 価値過程 $\left\{V_t = h_0B_t + \sum_{n=1}^{N} h_nS_n(t) \middle|\ t=0,1\right\}$
各時点におけるポートフォリオの総価値を表し，V_0 は確定値，V_1 は Ω 上の確率変数である．

2.2　裁定機会

取引戦略 $\boldsymbol{h}$ が**裁定機会**であるとは，次の (a), (b), (c) が成り立つことをいう．

$$\begin{cases} \text{(a) } V_0 = 0 \\ \text{(b) } \forall\omega\in\Omega;\ V_1(\omega)\geqq 0 \\ \text{(c) } E(V_1)>0 \end{cases}$$

言い換えると，投資家が損をするリスクにさらされることなく，取引において利益を生む可能性が得られるような投資機会が裁定機会である．このような機会があれば誰もがこの取引戦略に飛びつき，この証券の価格に影響を与える．この経済モデルは均衡状態にはなく，経済学的観点から理屈に合わない．

2.3　デリバティブと複製ポートフォリオ

$t=0$ で買手と売手の間で交わされ，$t=1$ でシナリオ $\omega\in\Omega$ が生起した場合に売手が買手に $X(\omega)$ 支払う（ペイオフ）契約を考える．このような契約あるいはそ

のペイオフを表す確率変数 X 自体をデリバティブ（金融派生商品）という．

デリバティブ X に対して，

$$\exists \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{N+1}, \forall \omega \in \Omega;\ V_1(\omega) = X(\omega)$$

が成り立つとき，X は**複製可能**であるといい，その取引戦略 $\boldsymbol{h}$ を**複製ポートフォリオ**という．

任意のデリバティブが複製可能である市場を**完備市場**，そうでない市場を**非完備市場**という．

2.4　非完備市場におけるデリバティブの価格付け

$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ {S_1}^*(0) \\ \vdots \\ {S_N}^*(0) \end{pmatrix}$ とすると，デリバティブ X の現在価格の上限・下限はそれぞれ次の LP の最適値である．

$$(\mathrm{P}_1)\left|\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{h}}{\min.} & \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} \\ \text{s.t.} & S^*\boldsymbol{h} \geqq \boldsymbol{X}^* \end{array}\right. \qquad (\mathrm{P}_2)\left|\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{h}}{\max.} & \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} \\ \text{s.t.} & S^*\boldsymbol{h} \leqq \boldsymbol{X}^* \end{array}\right.$$

(P_1) の最適解を**優複製ポートフォリオ**，(P_2) の最適解を**劣複製ポートフォリオ**という．

3　3 項 2 期間モデル

3.1　モデルの記述

$t = 0, 1, 2$ を取引時点とし，最終時点 $t = 2$ までに生起するシナリオの標本空間を

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_9\}\ (\forall \omega \in \Omega;\ P(\{\omega\}) > 0)$$

とする．また，危険証券の個数は 1 つ で，ある株式とする．ここで，3 項 2 期間証券市場モデルを構成する他の要素を以下のように表す．

(1) 銀行預金過程 $\{B_t \,|\, t = 0, 1, 2\}$
$t = 0$ で $B_0 = 1$ を銀行に預金したときの，$t = 1, 2$ における銀行預金の価値をそれぞれ B_1, B_2 とする．2 節と同様に，本論文では $B_t = (1+r)^t$ で，利率 $r(\geqq 0)$ は定数とする．

(2) 株価過程 $\{S_t \,|\, t = 0, 1, 2\}$
時点 t における株式の 1 単位当たりの価格を S_t とする．$S_0(> 0)$ は確定値，$t = 1, 2$ に対して S_t は Ω 上の確率変数であり，$\forall \omega \in \Omega;\ S_t(\omega) \geqq 0$ が成り立つものとする．

(3) 取引戦略 $\boldsymbol{h}_t = \begin{pmatrix} h_0(t) \\ h_1(t) \end{pmatrix} (t = 1, 2)$
$h_0(t)B_{t-1}$: 時点 $t-1$ において銀行預金に投じられた金額 , $h_1(t)$: 時点 $t-1$ から時点 t までの株式の保有単位数とする．※ $\boldsymbol{h}_2$ は一般に $t = 1$ でのシナリオによって異なる．

(4) 価値過程 $\{V_t \,|\, t = 0, 1, 2\}$
$V_0 = h_0(1) + h_1(1)S_0$ はポートフォリオの初期価値であり確定値である．また，$t = 1, 2$ に対して $V_t = h_0(t)B_t + h_1(t)S_t$ は時点 t において何かしらの取引が行われる直前のポートフォリオの価値であり，Ω 上の確率変数である．

3.2　自己充足的取引戦略

V_1 は時点 $t = 1$ において何かしらの取引が行われる直前のポートフォリオの価値を表している．一方で $h_0(2)B_1 + h_1(2)S_1$ は $t = 1$ で取引が行われた直後，つまり $t = 2$ にポートフォリオが持ち越される直前のポートフォリオ価値を表す．あるシナリオに対してこれら 2 つの価値が異なるというのは時点 t で資金がポートフォリオに追加・回収されることを意味する．しかし，資金の追加・回収は初期時点と最終時点を除いて実務上できない場合も多い．そこで自己充足的な取引戦略の概念を導入する．

取引戦略 $\boldsymbol{h}_t\,(t = 1, 2)$ が**自己充足的**であるとは，次が成り立つことをいう．

$$\forall \omega \in \Omega;\ V_1(\omega) = h_0(2)B_2 + h_1(2)S_1(\omega)$$

3.3　裁定機会

取引戦略 $\boldsymbol{h}_t\,(t = 1, 2)$ が裁定機会であるとは，次の (a), (b), (c), (d) が成り立つことをいう．

$$\begin{cases} \text{(a) } V_0 = 0 \\ \text{(b) } \forall \omega \in \Omega;\ V_2(\omega) \geqq 0 \\ \text{(c) } E(V_2) > 0 \\ \text{(d) } \boldsymbol{h}_t\,(t = 1, 2) \text{ は自己充足的} \end{cases}$$

4　3 項 2 期間モデルにおけるルックバックオプションの価格付け

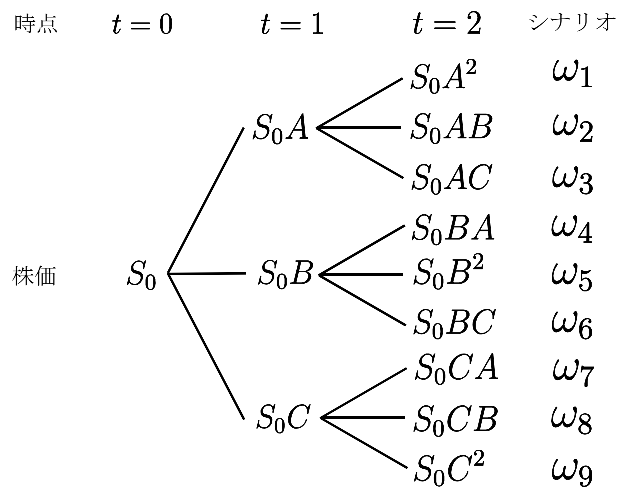

図 4.1 株価の推移と対応するシナリオ

株価の推移と対応するシナリオを図 4.1 のように設定する．ただし，$A>B>C>0$ とし，簡単のため $1+r=R$, $h_0(1)=y$, $h_1(1)=x$ と表記する．また，$\omega_1,\omega_4,\omega_7$ に対して，それぞれ $\begin{pmatrix}h_0(2)\\h_1(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\x_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_2\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_3\\x_3\end{pmatrix}$ と表記する．$A>R>C$ のとき，市場は無裁定になる [1] ので，これを仮定する．

ルックバックオプションの一つ $L=\max\{S_0,S_1,S_2\}$ ($i=1,\dots,9$ に対して $L_i=L(\omega_i)$ と表記する) について，$\omega_1,\omega_4,\omega_7$ それぞれに対する時点 $t=1$ における価格の上限を $\overline{p_1},\overline{p_2},\overline{p_3}$，下限を $\underline{p_1},\underline{p_2},\underline{p_3}$ とする．また，現在価格の上限を $\overline{p}$，下限を $\underline{p}$ とする．

以下の LP を解き，それぞれの最適値 $\underline{p_1},\overline{p_1}$ を求める ($\underline{p_2},\overline{p_2},\underline{p_3},\overline{p_3}$ についても同様の LP を解く)．

$$\left|\begin{array}{ll}\max\limits_{x_1,y_1}. & S_0Ax_1+Ry_1\\ \text{s.t.} & S_0A^2x_1+R^2y_1\leqq L_1\\ & S_0ABx_1+R^2y_1\leqq L_2\\ & S_0ACx_1+R^2y_1\leqq L_3\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ll}\min\limits_{x_1,y_1}. & S_0Ax_1+Ry_1\\ \text{s.t.} & S_0A^2x_1+R^2y_1\geqq L_1\\ & S_0ABx_1+R^2y_1\geqq L_2\\ & S_0ACx_1+R^2y_1\geqq L_3\end{array}\right.$$

そして，以下の LP を解き，それぞれの最適値 $\underline{p},\overline{p}$ を与える最適解を求める．

$$\left|\begin{array}{ll}\max\limits_{x,y}. & S_0x+y\\ \text{s.t.} & S_0Ax+Ry\leqq \underline{p_1}\\ & S_0Bx+Ry\leqq \underline{p_2}\\ & S_0Cx+Ry\leqq \underline{p_3}\end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{ll}\min\limits_{x,y}. & S_0x+y\\ \text{s.t.} & S_0Ax+Ry\geqq \overline{p_1}\\ & S_0Bx+Ry\geqq \overline{p_2}\\ & S_0Cx+Ry\geqq \overline{p_3}\end{array}\right.$$

4.1 現在価格の優劣複製ポートフォリオ

以下，優劣複製ポートフォリオをそれぞれ優，劣と略記する．

(1) $C\geqq 1$ のとき

[1] $RC(A-C)<B\{A(1-C)+R(A-1)\}$ のとき

(a) $(A-C)(B-C)R\leqq \bigl(C^2-B\bigr)R+A\{B(1-C)+R(B-C)\}$ のとき

劣 : $x=1,\ y=0$

(b) $(A-C)(B-C)R>\bigl(C^2-B\bigr)R+A\{B(1-C)+R(B-C)\}$, $R>B$ のとき

劣 :

$$x=\frac{R\bigl(A^2+B\bigr)+A\{B(C-1)-R(B+C)\}}{R(A-B)(A-C)},$$
$$y=\frac{S_0AB(1-C)(A-R)}{R^2(A-B)(A-C)}$$

(c) $(A-C)(B-C)R>\bigl(C^2-B\bigr)R+A\{B(1-C)+R(B-C)\}$, $B\geqq R$ のとき

劣 :

$$x=\frac{R\bigl(C^2-B\bigr)+A\{B(1-C)+R(B-C)\}}{R(A-C)(B-C)},$$
$$y=\frac{S_0BC(C-1)(A-R)}{R^2(A-C)(B-C)}$$

[2] $RC(A-C)\geqq B\{A(1-C)+R(A-1)\}$ のとき

(a) $R>B$ のとき

劣 :

$$x=\frac{R\bigl(A^2+B\bigr)+A\{B(C-1)-R(B+C)\}}{R(A-B)(A-C)},$$
$$y=\frac{S_0AB(1-C)(A-R)}{R^2(A-B)(A-C)}$$

(b) $B>R$ のとき

劣 :

$$x=\frac{R\bigl(C^2-B\bigr)+A\{B(1-C)+R(B-C)\}}{R(A-C)(B-C)},$$
$$y=\frac{S_0BC(C-1)(A-R)}{R^2(A-C)(B-C)}$$

(c) $B=R$ のとき

劣 :

$$x=0,\ y=\frac{S_0\{A(1-C)+B(A-1)\}}{B(A-C)}$$

[3] $R\geqq B$ のとき

優 : $x=1,\ y=0$

[4] $RA(B-C)\geqq B\{B(1-C)+R(B-1)\}$, $B>R$ のとき

(a) $B^2(C-1)+R\{A(B-C)-B(B-1)\}>(A-B)(B-C)R$ のとき

優 : $x=1,\ y=0$

(b) $B^2(C-1)+R\{A(B-C)-B(B-1)\}\leqq (A-B)(B-C)R$ のとき

優 :

$$x=\frac{B^2(1-C)+R\bigl\{B^2+C^2-B(C+1)\bigr\}}{R(B-C)^2},$$
$$y=\frac{S_0BC(C-1)(B-R)}{R^2(B-C)^2})$$

[5] $RA(B-C)<B\{B(1-C)+R(B-1)\}$, $B>R$ のとき

優 :

$$x=\frac{B^2(1-C)+R\bigl\{B^2+C^2-B(C+1)\bigr\}}{R(B-C)^2},$$
$$y=\frac{S_0BC(C-1)(B-R)}{R^2(B-C)^2}$$

(2) $B\geqq 1>C$ のとき

[1] $R>B$ のとき

劣 : $x=1,\ y=0$

[2] $B\geqq R$ のとき

(a) $BC\geqq 1$, $R\leqq B(B-C-1)(C-R-1)$ のとき

① $B>R$ のとき

劣 :

$$x=\frac{R-B(B-C-1)(C-R-1)}{R(B-C)^2},$$
$$y=\frac{S_0B(1-C)(B-R)}{R^2(B-C)^2}$$

② $B=R$ のとき

劣 : $x=0,\ y=S_0$

(b) $BC \geqq 1,\ R>B(B-C-1)(C-R-1)$ のとき

劣 :
$$x=\frac{R-B(B-C-1)(C-R-1)}{R(B-C)^2},$$
$$y=\frac{S_0B(1-C)(B-R)}{R^2(B-C)^2}$$

(c) $1>BC,\ B(1+R-C)\leqq C$ のとき

① $B>R$ のとき

劣 :
$$x=\frac{(1-B)\{C+B(C-1-R)\}}{R(B-C)^2},$$
$$y=\frac{B\big\{C^2+1-C(1+R)\big\}+C(R-1)}{R^2(B-C)^2}\times S_0B$$

② $B=R$ のとき

劣 : $x=0,\ y=S_0$

(d) $1>BC,\ B(1+R-C)>C$ のとき

① $C(R-1)\leqq B\big\{C(1+R)-\big(C^2+1\big)\big\}$ のとき

劣 :
$$x=\frac{C-AR-B\{1+A(C-1-R)\}}{R(A-C)(B-C)},$$
$$y=\frac{C(R-1)+B\left\{1+C^2-C(1+R)\right\}}{R^2(A-C)(B-C)}$$

② $C(R-1)>B\big\{C(1+R)-\big(C^2+1\big)\big\}$ のとき

劣 :
$$x=\frac{(1-B)\{C+B(C-1-R)\}}{R(B-C)^2},$$
$$y=\frac{B\big\{C^2+1-C(1+R)\big\}+C(R-1)}{R^2(B-C)^2}\times S_0B$$

[3] $AC\leqq 1$ のとき

優 : $x=\dfrac{R-A(A-C-1)(C-R-1)}{R(A-C)^2},$
$$y=\frac{S_0A(1-C)(A-R)}{R^2(A-C)^2}$$

[4] $1>AC$ のとき

(a) $A\{1+C(C-1-R)\}>C(1-R)$ のとき

優 : $x=\dfrac{(A-1)\{A(1-C+R)-C\}}{R(A-C)^2},$
$$y=\frac{A\{C(C-1-R)+1\}-C(1-R)}{R^2(A-C)^2}S_0A$$

(b) $A\{1+C(C-1-R)\}>C(1-R),\ R\geqq B$ のとき

優 : $x=\dfrac{A(1-C)+R(A-1)}{R(A-C)},\ y=0$

(c) $A\{1+C(C-1-R)\}>C(1-R),\ B>R$ のとき

優 :
$$x=\frac{BR(A-1)+AB(1-C)-(A-C)}{R(A-C)(B-C)},$$
$$y=\frac{CR(1-A)+AC(C-1)+A-C}{R^2(A-C)(B-C)}S_0B$$

(3) $1>B$ のとき

[1] $AB\leqq 1$ のとき

劣 : $x=\dfrac{(1-A)\{B+A(B-1-R)\}}{R(A-B)^2},$
$$y=\frac{A\big\{1+B^2-B(1+R)\big\}+B(R-1)}{R^2(A-B)^2}S_0A$$

優 : $x=\dfrac{(1-A)\{C+A(C-1-R)\}}{R(A-C)^2},$
$$y=\frac{A\big\{1+C^2-C(1+R)\big\}+C(R-1)}{R^2(A-C)^2}S_0A$$

[2] $1>AB$ のとき

劣 : $x=\dfrac{R-A(A-B-1)(B-1-R)}{R(A-B)^2},$
$$y=\frac{S_0A(1-B)(A-R)}{R^2(A-B)^2}$$

[3] $1>AB$ のとき

(a) $R\geqq A\{1-A+R-(A-B)(R-C)\}$ のとき

優 : $x=\dfrac{R-A(A-B-1)(B-1-R)}{R(A-B)^2},$
$$y=\frac{S_0A(1-C)(A-R)}{R^2(A-B)^2}$$

(b) $R<A\{1-A+R-(A-B)(R-C)\}$ のとき

優 : $x=\dfrac{R-A(A-B-1)(B-1-R)}{R(A-B)(A-C)},$
$$y=\frac{S_0A(1-B)(A-R)}{R^2(A-B)(A-C)}$$

5　結論

3項2期間モデルにおいて最終時点までの株価の最大値をペイオフとするルックバックオプションについて，現在価格の優劣複製ポートフォリオを導出した．

今後の課題としては，他のエギゾチックオプションについても価格付けを行うことがあげられる．

参考文献

[1] 中矢光泰（2013）「三項多期間モデルについて」
<http://www.artsci.kyushu-u.ac.jp/~se2otngc/students/M_Thesis_Nakaya.pdf>
2018年2月28日アクセス