あるルックバックオプションの価格付けとその複製ポートフォリオ構築

On oricing and hedging some look back options

経営システム工学専攻　渡辺　絢子

1　研究の目的

近年デリバティブの種類はますます多様化している。デリバティブは、金融工学的なテクニックを用いると、金融商品におけるリスクをヘッジしたり、あえて増大させるなどしてコントロールしたり、そのリスクをマネジメントすることが出来る。その価格計算やデルタヘッジを求めることは意味があるといえる。

ルックバックオプションの特徴には、リスクが高いことがある。そのためリスク管理を行う上で、あえてリスクをとるときに用いられる代表的なオプションなのである。従来のよく知られたルックバックオプションに関する価格付けや複製ポートフォリオ構築については他研究の論文にも記載がある。そこで本論文では、従来のペイオフを少し変えることで、この目的をより強調しさらにリスクの高い商品を考案した。

本論文の構成として、まずデリバティブの価格付け理論に基づき、オプションの価格付けを理解し、次に考案したペイオフのルックバックオプションの価格付けと実際にデルタヘッジの計算を行う。このデルタとは、デリバティブの中に不確実性をもつ証券が含まれている量を示しており、実務的にもこの量はリスク管理を行ううえで重要なものである。最後に、そのリスク管理がどのように高くなり、時刻によってどのような変化があるのかを検証するため、デルタヘッジのシミュレーションも行っている。エキゾティックオプションのデルタヘッジの計算は大変複雑であり、計算の工夫が要される。本論文ではその数学的工夫を大きな狙いとしている。

2　連続モデルのデリバティブ価格理論の概要

株価過程のモデルとしてブラック・ショールズモデルをとる。
時刻 t における株価 S_t は次の確率微分方程式に従っていると仮定する。

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW'_t \qquad S_0 = S$$

ここで W'_t は標準ブラウン運動、μ、σ はある定数である。伊藤の公式を用いてこの S_t は $S_t = Se^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W'_t}$ と表されることに注意する。この S_t は**幾何的ブラウン運動**とも呼ばれる。また、それと同時に

$$dB_t = rB_t dt \quad , \quad B_0 = 1$$

に従う安全債権 $B_t = e^{rt}$ も市場にあり自由に売り買いできるものとする.。このモデルは**ブラックショールズモデル**と呼ばれるものであり、この μ は投資家の思う株価の期待収益率、σ は株価のボラティリティである。このとき、以下の手順で任意のデリバティブ価格が「無裁定」の考え方より決定できる。また、それは各投資家が株価に見る期待収益率 μ や各投資家の見方（確率測度 P）に依存しないことがわかる。以上がブラックショールズモデルにおけるデリバティブ価格決定理論の骨子である。

1. 同値マルチンゲール測度の存在とその一意性
：割引株価過程 $(S'_t = e^{-rt}S_t = B_t^{-1}S_t)$ がマルチンゲールになるように確率測度 P を P と同値な確率測度 Q に変更する。この確率測度 Q は**同値マルチンゲール測度**と呼ばれる。
2. マルチンゲール表現定理を用いることによるデリバティブの資金自己調達的複製ポートフォリオの構成
：マルチンゲール表現定理を用いると、各時点 t で株 ϕ_t 単位、安全債券 ψ_t 単位を持つポートフォリオが

資金自己調達的であり、最終的に満期時 T にはデリバティブのペイオフと一致するような ϕ_t, ψ_t の組を見つけることができる。この組 ϕ_t, ψ_t をデリバティブの**複製ポートフォリオ**という。そのような複製ポートフォリオを見つけることができると無裁定の仮定より、デリバティブの価格は $\phi_0 S + \psi_0$ と一致しなければならないのである。

2.1 資金自己調達的ポートフォリオ

ポートフォリオ $\phi_t S_t + \psi_t e^{rt}$（$= V_t$ とおく）が**資金自己調達的ポートフォリオ**であるとは

$$dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t d(e^{rt})$$

を満たすことである。ここで、同値マルチンゲール測度 Q のもとで割引ペイオフの期待値を計算すると、満期 T のデリバティブのペイオフが Y のとき、$\sigma(W_s(s \leq T)) = \mathcal{F}_T$ なので Y は $\mathcal{F}_T$ 可測確率変数であることに注意して、Q のもとで期待値 $E^Q[e^{-rT}Y]$ を計算すると、これがデリバティブ Y の無裁定価格となる。そして、途中の時点 t における価格 E_t とデルタヘッジ（複製ポートフォリオの株保有単位）は以下を満たす。

$$E_t = E^Q[e^{-rT}Y|\mathcal{F}_t]$$
$$dE_t = \phi_t dS'_t$$

これを用いれば、いろいろなデリバティブの価格計算、複製ポートフォリオ構築が可能となる。

2.2 デルタヘッジ

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}(T, S)$$

そして複製ポートフォリオの株保有単位は

$$\phi_t = \frac{\partial C}{\partial S}(T - t, S)$$

となり、この ϕ_t のことをデルタヘッジと呼ぶ。

3 ルックバックオプション

通常、デリバティブは次の 2 種類に分類される。

$$\text{デリバティブ}\begin{cases}\text{標準的デリバティブ（先物、コール、プットなどの標準的金融派生商品）}\\ \text{エキゾティックオプション}\end{cases}$$

エキゾティックオプションは標準的ではないオプションのことで、通常相対取引で売買される。また、通常のオプションはそのペイオフが満期時の株価のみに依存するのに対し、エキゾティックオプションは経路依存型（株価の過去の履歴に依存する）ものが多い。

本論で取り上げるルックバックオプションは、エキゾティックオプションの一つの例で、オプション期間中の原資産価格の最安値や最高値を用いて、ペイオフを決めるオプションである。

以下のようなよく知られているものをペイオフとともに紹介する。

- フローティングストライク・ルックバックオプション
  ：ペイオフ $= S_T - S_{min}$（S_{min} はオプション期間中の原資産価格の最安値）としたコール型や、ペイオフ $= S_{max} - S_T$（S_{max} はオプション期間中の原資産価格の最高値）としたプット型がある。
- フィックスドストライク・ルックバックオプション
  ：ペイオフ $= \max(S_{max} - K, 0)$ で、ある一定の行使価格 K と引き換えに、オプション期間中の最高値を得られる権利であるコール型や、ペイオフ $= \max(K - S_{min}), 0$ で、オプション期間中の最安値と引き換えに、ある一定の行使価格を得られる権利であるプット型がある。

ここで、よく知られているものを少し変えて、最大値に加えて最小値も加味したペイオフの価格計算と複製ポートフォリオ構築について述べる。ここでは最大値に加えて最小値も考えることで、よりボラティリティが高くリスクも高い商品を考案する。その分さらに価格も高くなる。

3.1 価格式の導出

$$
\begin{aligned}
\text{ペイオフ} &= S_{\mathrm{max}:T} - S_{\mathrm{min}:T} \\
E_t &= E^Q[e^{-rT}(\max_{0\le u\le T} S_u - \min_{0\le u\le T} S_u)|\mathcal{F}_t] \\
&= E[e^{-rT}\max_{0\le u\le T} S_u|\mathcal{F}_t] - E[e^{-rT}\min_{0\le u\le T} S_u|\mathcal{F}_t] \\
&= S_0 e^{-rT} E[e^{\max_{0\le u\le T}\{\sigma W_u + (r-\frac{\sigma^2}{2})u\}}|\mathcal{F}_t] - S_0 e^{-rT} E[e^{\min_{0\le u\le T}\{\sigma W_u + (r-\frac{\sigma^2}{2})u\}}|\mathcal{F}_t] \qquad \text{(3-1-1)}
\end{aligned}
$$

を計算する。その際、計算の工夫として

$$
a_M = \max_{0\le u\le t}\{\sigma W_u + (r - \frac{\sigma^2}{2}u)\} \quad , \quad b = \sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t
$$

とおき、

$$
\max_{0\le u\le T}\{\sigma W_u + (r - \frac{\sigma^2}{2})u\} = \max\{a_M, \max_{t\le u\le T}\{\sigma W_u + (r - \frac{\sigma^2}{2})u\}\}
$$

ここで $W_u - W_t = W'_{u'}$ とすると、$W'_{u'}$ はブラウン運動であることから

$$
\therefore \max_{0\le u\le T}\{\sigma W_u + (r - \frac{\sigma^2}{2})u\} = \max\{a_M, b + \max_{0\le u'\le T-t}\{\sigma W'_{u'} + (r - \frac{\sigma^2}{2})u'\}\}
$$

と変形して計算する。$\min_{0\le u\le T}\{\sigma W_u + (r - \frac{\sigma^2}{2})u\}$ も同様にして計算することができる。

3.2 デルタヘッジ

$$
\begin{aligned}
&df_{(t,M_t,m_t,M_t-(\sigma W_t+(r-\sigma^2/2)t),m_t-(\sigma W_t+(r-\sigma^2/2)t))}(t,x_M,x_m,y_M,y_m) \\
=& \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_M^2} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_m^2} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial f}{\partial y_M} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial f}{\partial y_m}\right) dt}_{(*1)} \\
&+ \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_M} + \frac{\partial f}{\partial y_M}\right) dM_t}_{(*2)} + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_m} + \frac{\partial f}{\partial y_m}\right) dm_t}_{(*3)} - \sigma\left(\frac{\partial f}{\partial y_M} + \frac{\partial f}{\partial y_m}\right) dW_t
\end{aligned}
$$

ここで、E_t の計算結果から

$$\begin{aligned}
&f_{(t,a_M,a_m,a_M-b,a_m-c)}(t,x_M,x_m,y_M,y_m) \\
=\ & Se^{-rT}\left[e^{x_M}\Phi\left(\frac{y_M-(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-\frac{\sigma^2}{2r}e^{x_M-(1-\frac{2r}{\sigma^2})y_M}\Phi\left(-\frac{y_M+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right. \\
&\left.-e^{x_m}\Phi\left(-\frac{y_m-(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)+\frac{\sigma^2}{2r}e^{x_m-(1-\frac{2r}{\sigma^2})y_m}\Phi\left(\frac{y_m+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right] \\
&+S\frac{2r+\sigma^2}{2r}e^{-rt}\left[e^{x_M-y_M}\Phi\left(-\frac{y_M-(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-e^{x_m-y_m}\Phi\left(\frac{y_m-(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right]
\end{aligned}$$

とおくと

$(*1)$ の式は、

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_M^2}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_m^2}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial f}{\partial y_M}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial f}{\partial y_m}=0$$

となる。また、$(*2)(*3)$ の式は、$(M_t-W_t)dM_t=0,(m_t-W_t)dm_t=0$ となるので、

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_M}+\frac{\partial f}{\partial y_M}\right)(t,x_M,0)=0 \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}+\frac{\partial f}{\partial y_m}\right)(t,x_m,0)=0$$

以上より、

$$\therefore\ dE_t=-\sigma\left(\frac{\partial f}{\partial y_M}+\frac{\partial f}{\partial y_m}\right)dW_t$$

$$\begin{cases}\phi_t=-\sigma\left(\frac{\partial f}{\partial y_M}+\frac{\partial f}{\partial y_m}\right)\times\frac{1}{\sigma e^{-rt}S_t}=-\left(\frac{\partial f}{\partial y_M}+\frac{\partial f}{\partial y_m}\right)\times\frac{1}{e^{-rt}S_t}\\ \psi_t=E_t-\phi_t e^{-rt}S_t\end{cases}$$

3.3 ヘッジ検証の概要

また、本論文では具体的に解析解を求めている。それをもとに VBA プログラムでシミュレーションも行った。

大まかにとらえれば、株価の動きと ϕ の動きは似ていると思われる。計算式を見てもわかることだが、満期に近い時刻での株価の変動が ϕ に与える影響は早い時刻でのそれよりも大きくなる。特に満期において ϕ の値が大きく変わる可能性があるため、あえてリスクを取りたいという状況において、従来のルックバックオプションよりリスクの高い商品として利用価値があると考えられる。

4 まとめ

最後に、ルックバックオプションの途中価格は Azèma-Yor,Kennedy　Martingale の一種であり、本論文では具体的計算によりこれを確かめ、デルタヘッジを求めることはこれの応用であることをここに述べておく。

エキゾティックオプションの特にルックバックオプションに焦点を当て、新しいペイオフでのオプションの価格付けと複製ポートフォリオの構築を行ったが、エキゾティックオプションのデルタヘッジの計算は大変複雑であり、計算の工夫が要された。その困難な数式に、工夫を凝らしアプローチすることが本論文での目的であった。このデルタヘッジはリスク管理をするうえで重要なものであり実務でも用いられているが、シミュレーション結果からもヘッジへの利用は難しく、よりリスクを取るものであった。