代数曲線上の因子について

Divisors on Algebraic Curves

数学専攻　木下大地
Daichi KINOSHITA

1　概要

代数曲線とその因子について, Riemann-Roch の定理と Hurwitz の定理を証明し, その内容や応用例をまとめた. Riemann-Roch の定理は曲線 X と X 上の因子 D に対して, X の種数 g と標準因子 K を用いることで D の完備線型系の次元を計算しようという定理である. Hurwitz の定理は 2 つの曲線の種数とその間の射の分岐指数の関係についての定理である.

記号や用語の約束として, k を代数閉体とする. k 上の準射影的整スキームのことを**代数多様体** (または単に**多様体**) という. また, k 上の 1 次元非特異射影的多様体を**曲線**という. この曲線の定義は本論文 §5 のみで用いられる定義である.

2　因子

定義 2.1　X を k 上のネーター整スキームとする. このとき, X の余次元 r の閉部分スキームで整なもの全体の集合を X^r とし, X^1 の元を**素因子**という. X の素因子全体が生成する自由アーベル群を Div X とし, その演算は "+" で表す. また, Div X の元を **Weil 因子**という.

定義 2.2　X を k 上のネーター整スキームとし, $K := k(X)$ を X の関数体とする. このとき, 任意の素因子 $P \in X^1$ に対して $\mathfrak{p}$ をその生成点とすると, 任意の $f \in K^\times$ に対して $f = g/h$ となる $g, h \in \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \setminus \{0\}$ が取れる. これを用いて,

$$\mathrm{ord}_P f := \mathrm{length}_{\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}}(\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}/(g)) - \mathrm{length}_{\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}}(\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}/(h))$$

$$(f) := \sum_{P \in X^1} \mathrm{ord}_P f \cdot P$$

と定義し, (f) を f **の因子**という. また, 準同型 $K^\times \ni f \mapsto (f) \in \mathrm{Div}X)$ の余核を**因子類群**といい, $\mathrm{Cl}X$ で表す.

定義 2.3　X をスキームとする. $\mathcal{O}_X$ の各開集合 $U \subset X$ での切断 $\mathcal{O}(U)$ を茎で非零因子となる切断全体で局所化してできた前層を $\mathcal{O}(U)$ の**全商環の前層**といい, この前層の層化を $\mathscr{K}$ とする. このとき, 商層 $\mathscr{K}^\times/\mathcal{O}_X^\times$ の大域切断を **Cartier 因子**といい,

$$\mathrm{CaCl}X := \mathrm{Coker}(\Gamma(X, \mathscr{K}^\times) \to \Gamma(X, \mathscr{K}^\times/\mathcal{O}_X^\times))$$

を **(Cartier 因子の) 因子類群**という. 通常, $\mathscr{K}^\times/\mathcal{O}_X^\times$ の演算は乗法であるが, Weil 因子との整合性を保つため Cartier 因子の演算は加法を用いる. また, このときの同値関係を**線形同値**といい, $\sim$ で表す. 0 と同値な因子を**主 (Cartier) 因子**という.

命題 2.4　X をネーター整スキームとする. このとき, 群準同型 $\Gamma(X, \mathscr{K}^\times/\mathcal{O}_X^\times) \to \mathrm{Div}X$ が存在し, この準

同型は $\mathrm{CaCl}X \to \mathrm{Cl}X$ を引き起こす．また, X が局所分解的であればこの 2 つの準同型は両方とも同型である．

定義 2.5 X を環付き空間とする．このとき, 可逆層の同型類全体は演算 $\otimes_{\mathcal{O}_X}$ によってアーベル群をなす．この群を X の **Picard 群**といい, $\mathrm{Pic}X$ で表す．

命題 2.6 X を整スキームとする．このとき, $\mathrm{CaCl}X \cong \mathrm{Pic}X$ である．

系 2.7 X を曲線とする．このとき, $\mathrm{Cl}X \cong \mathrm{CaCl}X \cong \mathrm{Pic}X$ である．

定義 2.8 Y をスキーム, X を Y 上のスキームとする．対角射 $\Delta : X \to X \times_Y X$ を考えると, アフィンスキーム間の射は分離的であることから Δ は局所的には閉であるとわかる．よって, イデアル層が定義でき, それを $\mathscr{I}$ とおく．このとき, $\Delta^*(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)$ を**相対微分の層**といい, $\Omega_{X/Y}$ で表す．

定義 2.9 X を k 上の n 次元非特異多様体とする．このとき, $\omega_X := \bigwedge^n \Omega_{X/k}$ とし, これを**標準層**とよぶ．

定義 2.10 X を k 上の曲線とする．その相対微分の層 $\Omega_{X/k}$ に対応する因子を**標準因子**といい, K で表す．

定理 2.11 (Serre の双対定理) X を n 次元多様体, F を局所自由層とする．このとき,

$$H^i(X, \mathscr{F}) \cong H^{n-i}(X, \mathscr{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X)'$$

となる．

定義 2.12 X を k 上の射影的スキーム, $\mathscr{F}$ を X 上の連接層とする．このとき,

$$\chi(\mathscr{F}) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathscr{F})$$

とし, $\chi(\mathscr{F})$ を $\mathscr{F}$ の **Euler 標数**とよぶ．

定義 2.13 X を k 上 r 次元射影的スキームとする．

$$p_a(X) := (-1)^r(\chi(\mathcal{O}_X) - 1)$$

とし, この $p_a(X)$ を X の**算術種数**という．

また, X を非特異としたとき, $p_g(X) := \dim_k \Gamma(X, \omega_X)$ として, これを X の**幾何種数**という．

命題 2.14 X を曲線とする．このとき, $p_a(X) = p_g(X)$ である．このことより, p_a, p_g を単に**種数**とよび, g で表す．

定義 2.15 X を k 上の曲線とする．このとき, Weil 因子 $D = \sum_i n_i P_i$ に対して $\sum_i n_i$ を D の**次数**といい, $\deg D$ で表す．

任意の因子 D に対して, D と線形同値な有効因子全体の集合を $|D|$ と書き, **完備線形系**と呼ぶ．$|D|$ は集合として $(H^0(X, \mathscr{L}(D)) \setminus \{0\})/k^\times$ と 1 対 1 対応している．このことにより, $|D|$ は射影空間の閉点の集合としての構造を持つことができる．$l(D) := \dim_k H^0(X, \mathscr{L}(D))$ としたとき, $\dim |D| = l(D) - 1$ ということになる．

定義 2.16 X, Y を曲線, $f : X \to Y$ を曲線間の射とする．このとき, f による関数の引き戻し $k(Y) \to k(X)$

がある．この拡大 $k(X)/k(Y)$ の拡大次数を f の**次数**と定義し, $\deg f$ と表す．また, 拡大 $k(X)/k(Y)$ が有限かつ分離的のとき, f を**有限分離的射**という．

定義 2.17 $f : X \to Y$ を曲線間の有限分離的射とし, $P \in X$ とする．このとき, $f^{\#} : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$ における ord の比を P における**分岐指数**といい, e_P で表す．

$$e_P := \mathrm{ord}_P(f^{\#}(t)) \qquad (t \in \mathcal{O}_{Y,f(P)},\ \mathrm{ord}_{f(P)}(t) = 1)$$

曲線の局所環は離散付値環なので, e_P は t の取り方に依らない．

また, $e_P > 1$ となるとき f は P で**分岐している**といい, 「$\mathrm{ch}k = 0$」または「$\mathrm{ch}k = p$ で p が e_P を割り切らない」とき, その分岐を **tame**(手懐けられた) といい, そうでないとき **wild**(野生の) という．

さらに, f に対して

$$\begin{array}{cccc} f^* : & \mathrm{Div}Y & \to & \mathrm{Div}X \\ & \Psi & & \Psi \\ & Q & \mapsto & \displaystyle\sum_{P \mapsto Q} e_P P \end{array}$$

と定義する．このとき, $D \in \mathrm{Div}Y$ に対して, $f^*(\mathscr{L}(D)) = \mathscr{L}(f^*D)$ が成り立つ．

定義 2.18 $f : X \to Y$ を曲線間の有限分離的射とする．このとき,

$$R := \sum_{P \in X} \mathrm{length}(\Omega_{X/Y,P})P$$

とし, R を f の**分岐因子**という．

3 主定理

定理 3.1 (Riemman-Roch の定理) X を k 上の種数 g の曲線, D を X 上の因子とする．このとき,

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g$$

が成り立つ．

定理 3.2 (Hurwitz の定理) $f : X \to Y$ を曲線間の有限分離的射とし, $n = \deg f$ とする．このとき,

$$2g(X) - 2 = n(2g(Y) - 2) + \deg R$$

が成り立つ．さらに, f の任意の分岐が tame なら,

$$\deg R = \sum_{P \in X} (e_P - 1)$$

である．

4 主定理の応用

例 4.1 X を曲線, その種数を g とすると, 標準因子 K に対して以下の等式が成り立つこととなる．

$$l(K) - 1 = \deg K + 1 - g$$

さらに, 幾何種数の定義より $l(K) = g$ なので $\deg K = 2g - 2$ ということがわかる.

例 4.2　X を曲線とする．また, X が $\mathbb{P}^1_k$ と双有理であるとき, X を**有理的**という．X について, 以下の (i)~(iii) が同値である.

(i) X が有理的.

(ii) 異なる任意の 2 点 $P, Q \in X$ に対して P, Q が因子として $P \sim Q$.

(iii) $g = 0$.

例 4.3　$f : X \to Y$ が有限分離的射なら $\deg R$ は偶数である.

例 4.4　$X := \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ とし, $f : X \to X$ を n 乗写像とする．f は 0 と無限遠点のみで分岐し, その分岐指数は n となる.

定義 4.5　種数 1 の曲線 X を**楕円的**という.

例 4.6　X を楕円曲線として, X の点 P_0 を 1 つ固定する．因子類群の中で次数 0 の因子全体は部分群をなすので, それに対応する $\mathrm{Pic}X$ の部分群を $\mathrm{Pic}^\circ X$ とする．このとき, 写像

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \mathrm{Pic}^\circ X \\ \Psi & & \Psi \\ P & \mapsto & \mathscr{L}(P - P_0) \end{array}$$

は全単射である．この全単射によって $\mathrm{Pic}^\circ X$ の群構造を X の閉点の集合に移すことができる．この群構造の単位元は P_0 である.

例 4.7　$\mathrm{ch}k = 0$ とすれば, 楕円曲線間の任意の有限分離的射は不分岐である．特に例 4.6 の群における n 倍写像は不分岐である.

参考文献

[1] Atiyah, M. F. , MacDonald, I. G.: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969

[2] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*, Grad. Texts in Math. 52, New York, Springer, 1977

[3] 松村英之: 復刊 可換環論, 共立出版, 2000 年

[4] Matsumura, H.: *Commutative Algebra, Second Edition*, Benjamin, Canada, 1980

[5] 雪江明彦: 代数学 3 代数学のひろがり, 日本評論社, 2011 年