群のコホモロジーと局所類体論
Cohomology of groups and local class field theory

数学専攻　織茂 あゆみ
ORIMO, Ayumi

1　はじめに

本論文は代数的整数論の中でも局所類体論についてまとめたものである．局所類体論によれば, 局所体の Abel 拡大の Galois 群はその局所体の乗法群によって表される．すなわち, 基礎体として p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ をとり, Ω を $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包, $\mathfrak{K}$ を Ω に含まれる $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体全体の集合とするとき, 任意の $K, k \in \mathfrak{K}$ に対し K/k が Abel 拡大なら, 同型

$$\mathrm{Gal}(K/k) \cong k^\times / N_{K/k} K^\times$$

が成り立つ．これが局所類体論の同型定理である．本論文では河田敬義著「代数的整数論」の方法にしたがって局所類体論の同型定理を証明する．証明は大きく二段階に分かれていて, 次の通りである．

(i) 類構造の概念を定式化して, 類構造に対する同型定理を確立する．

(ii) 局所体の場合に, 乗法群が類構造であることを示す．

これらの議論の中で重要な役割を果たすのが群のコホモロジー (より正確には Tate コホモロジー) である．

2　群のコホモロジー

定理 2.1. G を有限群とする．任意の G 加群 A と $r \in \mathbb{Z}$ に対して **r 次コホモロジー群** (r-th cohomology group) $H^r(G, A)$ が定まり, 次の性質を持つ．

DI $H^r(G, A)$ は A について共変関手的である．

DII G 加群の短完全系列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ に対し, 長完全系列

$$\cdots \longrightarrow H^r(A) \longrightarrow H^r(B) \longrightarrow H^r(C) \xrightarrow{\delta^\sharp} H^{r+1}(A) \longrightarrow \cdots$$

がある．

DIII $\Phi^0 : H^0(G, A) \cong A^G / N_G A$

DIV G 加群 A が G 弱射影的ならば, すべての $r \in \mathbb{Z}$ に対して $H^r(G, A) = 0$ である．

命題 2.2. G を有限群とし, A, B を G 加群とする．$r, s \in \mathbb{Z}$ とし, $\alpha \in H^r(G, A)$, $\beta \in H^s(G, B)$ とするとき, α と β との **cup 積** (cup product) $\alpha \cup \beta \in H^{r+s}(G, A \otimes B)$ が定義されて, 次の性質 PI, PII, PIII が成り立つ．

PI $\alpha_i \in H^r(G, A)$, $\beta_i \in H^s(G, B)$ に対して

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \cup \beta = \alpha_1 \cup \beta + \alpha_2 \cup \beta, \qquad \alpha \cup (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \cup \beta_1 + \alpha \cup \beta_2$$

PII A, B, C, D を G 加群とする．G 準同型 f, g に対して $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$ で,

$$0 \longrightarrow A{\otimes}D \xrightarrow{f\otimes 1} B{\otimes}D \xrightarrow{g\otimes 1} C{\otimes}D \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}, \qquad 0 \longrightarrow D{\otimes}A \xrightarrow{1\otimes f} D{\otimes}B \xrightarrow{1\otimes g} D{\otimes}C \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$$

ならば $\gamma \in H^r(G,C)$, $\xi \in H^s(G,D)$ に対して

$$(\delta^\sharp\gamma)\cup\xi = \delta^\sharp(\gamma\cup\xi), \qquad \delta^\sharp(\xi\cup\gamma) = (-1)^r(\xi\cup\delta^\sharp\gamma)$$

が成り立つ．

PIII 双線形写像 $\Psi : A^G/N_GA \times B^G/N_GB \longrightarrow (A\otimes B)^G/N_G(A\otimes B)$ を $a \in A^G$, $b \in B^G$ に対して $\Psi(a+N_GA, b+N_GB) = a{\otimes}b + N_G(A{\otimes}B)$ によって定義する．このとき $\alpha \in H^0(G,A)$, $\beta \in H^0(G,B)$ に $\Phi(\alpha) = a + N_GA$, $\Phi(\beta) = b + N_GB$ $(a \in A^G,\ b \in B^G)$ が対応すれば, $\alpha\cup\beta \in H^0(G, A\otimes B)$ に対して

$$\Phi(\alpha\cup\beta) \longmapsto \Psi(a+N_GA, b+N_GB)$$

が成り立つ．

定理 2.3 (**Tate の定理**)**.** A を G 加群とする．G のすべての部分群 H に対して,

$$H^1(H,A) = 0, \qquad H^2(H,A) \cong \mathbb{Z}/|H|\mathbb{Z}$$

が成り立つとする．$H^2(G,A)$ の任意の生成元 α をとり, $\zeta \in H^r(G,\mathbb{Z})$ に対して, $\Phi_\alpha : \zeta \mapsto \alpha\cup\zeta \in H^{r+2}(G,A)$ と定義する．このとき $\Phi_\alpha : H^r(G,\mathbb{Z}) \cong H^{r+2}(G,A)$ が成り立つ．

系 2.4. 仮定は定理 2.3 と同様とする．標準 G 鎖複体を用いて, $H^2(G,A)$ の生成元 α を $\alpha = f + \delta A_1$ $(f \in A_2, \delta f = 0)$ と表す． そのとき $\sigma \in G$ に対して $\Psi : \sigma \bmod [G,G] \mapsto -\sum_{\tau\in G} f[\tau,\sigma] \bmod N_GA$ は同型 $\Psi : G/[G,G] \cong A^G/N_GA$ を与える．

3 抽象的類体論と局所類体論

3.1 類構造

F を定まった体, Ω を F の定まった無限次代数的 Galois 拡大とする．Ω に含まれる F の有限次拡大の全体を $\mathfrak{K}$ とする．

$$\mathfrak{K} = \{K \mid F \subset K \subset \Omega,\ [K:F] < +\infty\}$$

今後考える体 k, l, K, L は, $\mathfrak{K}$ に属するものとする．

各 $K \in \mathfrak{K}$ に Abel 群 $E(K)$ が対応づけられていて, 次の性質を満たすとき, $\{E(K) \mid K \in \mathfrak{K}\}$ を類構造 (class formation) という．

CI $k \subset K$ ならば, 単射 $\varphi_{k\to K} : E(k) \to E(K)$ が定義されている．

CII $k \subset l \subset K$ ならば, $\varphi_{l\to K}\varphi_{k\to l} = \varphi_{k\to K}$

CIII $k \subset K$, K/k を Galois 拡大, $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ とする．各 $\sigma \in G$ に対して自己同型 $\sigma : E(K) \to E(K)$ が定義されて, $E(K)$ は G を作用群とする Abel 群となる．かつ

$$E(K)^G = \varphi_{k\to K}E(k)$$

が成り立つ．

CIV $k \subset K \subset L$, K/k と L/k は Galois 拡大で, $G = \mathrm{Gal}(L/k)$, $G' = \mathrm{Gal}(K/k)$, $\lambda : G \to G'$ を標準的全射とする．このとき $\sigma \in G$, $\alpha \in E(K)$ に対して $(\varphi_{K\to L}(\alpha))^\sigma = \varphi_{K\to L}(\alpha^{\lambda(\sigma)})$ が成り立つ.

CV K/k を Galois 拡大, $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ とする．$E(K)$ は G を作用群とする Abel 群なので, $E(K)$ を係数とする G のコホモロジー群 $H^r(G, E(K))$ が定義される．それに対して

(i) $H^1(G, E(K)) = \{1\}$

(ii) $H^2(G, E(K)) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (加群)　$(n = [K : k] = |G|)$

が成り立つ.

3.2 抽象類体論の基本定理

類構造の性質 CV によって Tate の定理 (定理 2.3) が適用できる．すなわち

定理 3.1. $\{E(K) \mid K \in \mathfrak{K}\}$ を類構造とし, K/k を Galois 拡大, $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ とするとき

$$H^r(G, E(K)) \cong H^{r-2}(G, \mathbb{Z}) \qquad (r \in \mathbb{Z}) \tag{3.2.1}$$

である．とくに ξ^2 を $H^2(G, E(K))$ の一つの生成元とするとき, $\zeta^{r-2} \in H^{r-2}(G, \mathbb{Z})$ に対して $\Phi_\xi : \zeta^{r-2} \mapsto \xi^2 \cup \zeta^{r-2}$ と対応させることで (3.2.1) の同型が得られる.

特に $r = 0$ の場合に適用すると, 系 2.4 の結果を用いて, 次の抽象的類体論における基本定理が導かれる.

定理 3.2 (同型定理)**.** $\{E(K) \mid K \in \mathfrak{K}\}$ を類構造とし, K/k を Galois 拡大, $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ とする．巡回群 $H^2(G, E(K))$ の一つの生成元を ξ とし, コホモロジー類 ξ に属する任意の双対輪体を $f[\sigma, \tau]$ $(\sigma, \tau \in G)$ とする．このとき,

$$\sigma \bmod^\times [G, G] \longmapsto \left(\prod_{\tau \in G} f[\tau, \sigma]\right)^{-1} \bmod^\times N_G E(K)$$

によって, 同型

$$G/[G, G] \cong E(K)^G / N_G E(K)$$

を得る．特に K/k が Abel 拡大なら, $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ に対して

$$\Phi : G \cong E(k)/N_{K/k} E(K)$$

が成り立つ.

3.3 局所数体における類構造

基礎体 F として p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ をとり, Ω を $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包, $\mathfrak{K}$ を $\mathbb{Q}_p$ の任意の有限次拡大 k の全体とする.

定理 3.3. 各 $k \in \mathfrak{K}$ に対して, $E(k) = k^\times$ とし, $k \subset K$ に対して, $\varphi_{k\to K} : k^\times \to K^\times$ を (標準的) 単射とするとき, $\{E(k) \mid k \in \mathfrak{K}\}$ は類構造である.

類構造の性質 CI, CII, CIII, CIV が成り立つことはほとんど自明である．CV (i) は Hilbert の定理 90 よりわかる．よって, CV (ii) つまり K/k を Galois 拡大, $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ とするとき, $H^2(G, K^\times) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n = [K : k] = |G|)$ がいえればよい.

補題 3.4. G が巡回群であれば, $H^2(G, K^\times)$ の位数は $n = |G|$ に等しい.

定理 3.5. K/k が巡回拡大で, $e(K/k)$ をその分岐指数, $\mathfrak{U}$ を K の単数群とする. そのとき, $H^r(G, \mathfrak{U})$ $(r \in \mathbb{Z})$ の位数はすべて e である. とくに不分岐拡大 K/k に対しては $H^r(G, \mathfrak{U}) = \{1\}$ $(r \in \mathbb{Z})$ である.

定理 3.6. K/k が n 次不分岐拡大ならば, $H^2(G, K^\times)$ は n 次巡回群である.

系 3.7. n 次不分岐拡大 K/k において, 写像 $j(\alpha) = \mathrm{ord}(\alpha)$ によって $H^0(G, K^\times) \cong k^\times / N_{K/k}K^\times \overset{j^\sharp}{\cong} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ である. すなわち $\alpha \in k^\times$ が $N_{K/k}K^\times$ に属するためには, $\mathrm{ord}(\alpha)$ が n の倍数であることが必要十分である.

補題 3.8. 任意の Galois 拡大 K/k, $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ に対して,

$$|H^2(G, K^\times)| \leqslant |G|$$

が成り立つ.

以上の定理たちから, 次の定理 3.9 が導かれる.

定理 3.9. 任意の Galois 拡大 K/k とその Galois 群 $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ に対して, $H^2(G, K^\times)$ は位数 $n = [K : k]$ の巡回群である.

よって, 定理 3.3 つまり $\{k^\times \mid k \in \mathfrak{K}\}$ が類構造であることが分かった.

参考文献

[1] 河田敬義, 代数的整数論, 共立出版, 1957

[2] D. G. Northcott, ホモロジー代数入門, 共立出版, 2010

[3] 雪江明彦, 代数学 2 環と体とガロア理論, 日本評論社, 2010

[4] 雪江明彦, 代数学 3 代数学の広がり, 日本評論社, 2011

[5] 桂利行, 代数学 II 環上の加群, 東京大学出版会, 2007

[6] 永田 雅宜, 可換体論, 裳華房, 1967