q パンルヴェ方程式の Lax pair と q ホイン方程式

Lax pair of q-Painleve equation and q-Heun equation

数学専攻　佐々木 憧子

SASAKI, Shoko

1　はじめに

パンルヴェ方程式は以下のような 6 個の非線形の常微分方程式の名称である. [1]

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{I}} &: y'' = 6y^2 + t \\
P_{\mathrm{II}} &: y'' = 2y^3 + ty + \alpha \\
P_{\mathrm{III}} &: y'' = \frac{1}{y}(y')^2 - \frac{1}{t}y' + \frac{1}{t}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y} \\
P_{\mathrm{IV}} &: y'' = \frac{1}{2y}(y')^2 + \frac{3}{2}y^3 + 2ty^2 + \left(\frac{t^2}{2} - \alpha\right) y + \frac{\beta}{y} \\
P_{\mathrm{V}} &: y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)(y')^2 - \frac{1}{t}y' + \frac{(y-1)^2}{t^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) \\
&\qquad + \frac{\gamma}{t}y + \delta\frac{y(y+1)}{y-1} \\
P_{\mathrm{VI}} &: y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t}\right)(y')^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{y-t}\right)y' \\
&\qquad + \frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{t}{y^2} + \gamma\frac{t-1}{(y-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(y-t)^2}\right)
\end{aligned}
$$

$y = y(t)$ は従属変数, $'=d/dt$ は独立変数 t についての微分を表す. また $\alpha, \beta, \ldots$ はパラメータである.

パンルヴェ方程式には差分版も知られており, 坂井 ([5]) により初期値空間の視点から包括的に捉えられた. 3 章で述べるように q パンルヴェ方程式に対して Lax pair を導入することができ, そのリストは梶原, 野海, 山田 ([2]) によりとりまとめられた.

本論文では, q パンルヴェ方程式 q-$P(D_5^{(1)})$, q-$P(E_6^{(1)})$, q-$P(E_7^{(1)})$ の Lax pair の片方に対してブローアップを行い, 得られた q 差分方程式と q ホイン方程式とのパラメータの対応を考えた. ブローアップは初期値空間を構成する際に現れる 8 つの不確定点に対して適用した. q ホイン方程式と比較することができる形にするために, Lax pair にブローアップを適用し得られる q 差分方程式にゲージ変換やパラメータの関係式を利用した. 結果として, q-$P(D_5^{(1)})$ は q ホイン方程式に, q-$P(E_6^{(1)})$, q-$P(E_7^{(1)})$ は q ホイン方程式の変異版に対応することを確認する. なお, 先行研究 [4] では, 対応が初期値空間の話を抜きに部分的に述べられている.

2 q パンルヴェ方程式

梶原, 野海, 山田のレビュー ([2]) より q パンルヴェ方程式 q-$P(E_6^{(1)})$ は以下のように与えられている. このとき $q \neq 0$, $|q| < 1$ である.

$$\begin{cases} \dfrac{(fg-1)(\overline{f}g-1)}{f\overline{f}} = \dfrac{\left(g-\frac{1}{\nu_1}\right)\left(g-\frac{1}{\nu_2}\right)\left(g-\frac{1}{\nu_3}\right)\left(g-\frac{1}{\nu_4}\right)}{\left(g-\frac{\nu_5}{\kappa_2}\right)\left(g-\frac{\nu_6}{\kappa_2}\right)}, & (2.1) \\ \dfrac{(\overline{f}g-1)(\overline{f}\overline{g}-1)}{g\overline{g}} = \dfrac{(\overline{f}-\nu_1)(\overline{f}-\nu_2)(\overline{f}-\nu_3)(\overline{f}-\nu_4)}{\left(\overline{f}-\frac{\kappa_1}{q\nu_7}\right)\left(\overline{f}-\frac{\kappa_1}{q\nu_8}\right)}. & (2.2) \end{cases}$$

像 $(\overline{f}, \overline{g}) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ が一意的に定まらないような点 $(f, g) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を不確定点と呼ぶ. 上の式から (f, g) に対する不確定点は以下の 8 点であることが分かる. また, この 8 点を点配置と呼ぶ.

$$P_i : \left(\nu_i, \frac{1}{\nu_i}\right)\ (i=1,\ldots,4), \quad \left(0, \frac{\nu_i}{\kappa_2}\right)\ (i=5,6), \quad \left(\frac{\kappa_1}{\nu_i}, 0\right)\ (i=7,8). \tag{2.3}$$

さらに, q-$P(E_6^{(1)})$ の Lax pair は以下のように与えられている. [2]

$$\begin{aligned} L_1 =& \frac{\frac{z}{q}\prod_{i=1}^{4}(g\nu_i-1)}{g(fg-1)\left(\frac{g}{q}z-1\right)} - \frac{\prod_{i=5}^{6}\left(\frac{g\kappa_2}{\nu_i}-1\right){\kappa_1}^2}{fgq\nu_7\nu_8} + \frac{\prod_{i=1}^{4}\left(\nu_i-\frac{z}{q}\right)}{f-\frac{z}{q}}\left\{\frac{g}{1-\frac{g}{q}z} - T_z^{-1}\right\} \\ &+ \frac{\prod_{i=7}^{8}\left(\frac{\kappa_1}{\nu_i}-z\right)}{q(f-z)}\left\{\left(\frac{1}{g}-z\right) - T_z\right\}, \qquad (2.4) \\ L_2 =& \left(1-\frac{f}{z}\right)T + T_z - \left(\frac{1}{g}-z\right). \qquad (2.5) \end{aligned}$$

このとき, T_z は, z に関する平行移動を表していて $T_z : z \to qz$. T は時間発展を表し, $\overline{f} = T(f)$, $\underline{g} = T^{-1}(g)$ などと記す.

3 q パンルヴェ方程式の Lax pair と q ホイン方程式

3.1 q ホイン方程式

q ホイン方程式は, ハーン ([3]) によって以下のように与えられている.

$$\begin{aligned} &(x-h_1q^{1/2})(x-h_2q^{1/2})g(x/q) + l_3l_4(x-l_1q^{-1/2})(x-l_2q^{-1/2})g(qx) \\ &-\{(l_3+l_4)x^2 + Ex + (l_1l_2l_3l_4h_1h_2)^{1/2}(h_3^{1/2}+h_3^{-1/2})\}g(x) = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

また q ホイン方程式の変異版は, 竹村 ([4]) によって以下のように与えられている.
Ruijsenaars-van Diejen 系を 4 回退化させ q ホイン方程式を得る途中で, q ホイン方程式の変異版が得られる. 次数 3 の変異版は以下のように与えられている.

$$\begin{aligned} &(x-h_1q^{1/2})(x-h_2q^{1/2})(x-h_3q^{1/2})g(x/q) + (x-l_1q^{-1/2})(x-l_2q^{-1/2})(x-l_3q^{-1/2})g(qx) \\ &+\{-(q^{1/2}+q^{-1/2})x^3 + (h_1+h_2+h_3+l_1+l_2+l_3)x^2 - Ex \\ &+(l_1l_2l_3h_1h_2h_3)^{1/2}(h_4^{-1/2}+h_4^{1/2})\}g(x) = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

次数 4 の変異版は以下のように与えられている.

$$
\begin{aligned}
&(x-h_1q^{1/2})(x-h_2q^{1/2})(x-h_3q^{1/2})(x-h_4q^{1/2})g(x/q)\\
&+(x-l_1q^{-1/2})(x-l_2q^{-1/2})(x-l_3q^{-1/2})(x-l_4q^{-1/2})g(qx)+\Big[-(q^{1/2}+q^{-1/2})x^4\\
&+(h_1+h_2+h_3+h_4+l_1+l_2+l_3+l_4)x^3+Ex^2+(h_1h_2h_3h_4l_1l_2l_3l_4)^{1/2}\big\{(h_1^{-1}+h_2^{-1}+h_3^{-1}\\
&+h_4^{-1}+l_1^{-1}+l_2^{-1}+l_3^{-1}+l_4^{-1})x-(q^{1/2}+q^{-1/2})\big\}\Big]g(x)=0\,. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

$h_i, l_i\,(i=1,\dots,4)$ はパラメータで, E はアクセサリーパラメータである.

3.2 q パンルヴェ方程式の Lax pair と q ホイン方程式

Lax pair の片方 L_1 に関する q 差分方程式 $L_1y(z)=0$, すなわち

$$
\begin{aligned}
&\left\{\frac{\frac{z}{q}\prod_{i=1}^{4}(g\nu_i-1)}{g(fg-1)\left(\frac{g}{q}z-1\right)}-\frac{\prod_{i=5}^{6}\left(\frac{g\kappa_2}{\nu_i}-1\right){\kappa_1}^2}{fgq\nu_7\nu_8}\right\}y(z)+\frac{\prod_{i=1}^{4}\left(\nu_i-\frac{z}{q}\right)}{f-\frac{z}{q}}\left\{\frac{g}{1-\frac{g}{q}z}y(z)-y(z/q)\right\}\\
&+\frac{\prod_{i=7}^{8}\left(\frac{\kappa_1}{\nu_i}-z\right)}{q(f-z)}\left\{\left(\frac{1}{g}-z\right)y(z)-y(qz)\right\}
\end{aligned}
$$

に対し, 点配置である 8 点においてブローアップを適用する. ここでは $P_1:(\nu_1,\frac{1}{\nu_1})$ について考える. $(f,g)=(f_1g_1+\nu_1, g_1+1/\nu_1)$ と変数変換すると, $g_1=0$ は $P_1:(\nu_1,\frac{1}{\nu_1})$ に対応する. q 差分方程式 $L_1y(z)=0$ が $g_1=0$ においてどのような式になるかを考え, ゲージ変換やパラメータの関係式 $\kappa_1^2\kappa_2^2=q\nu_1\cdots\nu_8$ を用いると次のような差分方程式を得る.

$$
\begin{aligned}
&(z-q\nu_2)(z-q\nu_3)(z-q\nu_4)u(z/q)+(z-q\nu_1)\left(z-\frac{\kappa_1}{\nu_7}\right)\left(z-\frac{\kappa_1}{\nu_8}\right)u(qz)\\
&+\Big[-(q^{-1/2}+q^{1/2})z^3+\left(q^{3/2}\nu_1+q^{1/2}\nu_2+q^{1/2}\nu_3+q^{1/2}\nu_4+\frac{q^{1/2}\kappa_1}{\nu_7}+\frac{q^{1/2}\kappa_1}{\nu_8}\right)z^2\\
&-\left(K_0+\frac{K_1}{f_1+{\nu_1}^2}\right)z+\left(q^4\frac{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4{\kappa_1}^2}{\nu_7\nu_8}\right)^{1/2}\left\{\left(\frac{\nu_5}{\nu_6}\right)^{1/2}+\left(\frac{\nu_5}{\nu_6}\right)^{-1/2}\right\}\Big]u(z)=0\,. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

ここで, K_0, K_1 は z や f_1 に依存しない数である. 上の式は q ホイン方程式の次数 3 の変異版 (3.2) と同様の形になっており, 比較すると以下のように対応していることがわかる. (q ホイン $\leftrightarrow$ q-$P(E_6^{(1)})$)

$$
\begin{aligned}
&h_1=q^{1/2}\nu_2,\quad h_2=q^{1/2}\nu_3,\quad h_3=q^{1/2}\nu_4,\quad h_4=\frac{\nu_5}{\nu_6},\\
&l_1=q^{3/2}\nu_1,\quad l_2=\frac{q^{1/2}\kappa_1}{\nu_7},\quad l_3=\frac{q^{1/2}\kappa_1}{\nu_8},\quad q=q\,. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

また, アクセサリーパラメータ E は本質的に f_1 に対応する. $P_i\,(i=2,\dots,8)$ に関しても同様にして対応することが分かる.

q パンルヴェ方程式 q-$P(D_5^{(1)})$, q-$P(E_7^{(1)})$ の Lax pair に対しても同様の計算を行うと, それぞれ q ホイン方程式, q ホイン方程式の次数 4 の変異版に対応することが確認できた.

4 おわりに

本研究では, 梶原, 野海, 山田 ([2]) でまとめられている q パンルヴェ方程式のデータを用いて計算し, q パンルヴェ方程式 q-$P(D_5^{(1)})$, q-$P(E_6^{(1)})$, q-$P(E_7^{(1)})$ の Lax pair から得られる q 差分方程式と q ホイン方程式, q ホイ

ン方程式の変異版との対応を確認することが出来た.

今後の研究課題として q パンルヴェ方程式 q-$P(E_8^{(1)})$ の Lax pair から得られる q 差分方程式と Ruijsenaars-van Diejen 系との対応が考えられる. このことから, q-$P(E_8^{(1)})$ の Lax pair に点配置の 8 点に対するブローアップを適用し, 得られる q 差分方程式を考える方法を検討したい. また, パラメータが特別な場合についても検討したい.

参考文献

[1] 野海正俊, パンルヴェ方程式 -対称性からの入門-, 朝倉書店 (2000)

[2] K. Kajiwara, M. Noumi, Y. Yamada, Geometric aspects of Painlevé equations, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **50** (2017) 073001

[3] W. Hahn, On linear geometric difference equations with accessory parameters, *Funkcial Ekvac* **14** (1971), 73–78

[4] K. Takemura, Degenerations of Ruijisenaars-van Diejen operator and q-Painlevé equations, *Journal of Integrable Systems* (2017) **2,** xyx008

[5] H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, *Commun. Math. Phys.* **220** (2001), 165–229.