複素曲面上の Morse 理論

Morse theory on complex surfaces

数学専攻　志村 佳太
SHIMURA, Keita

はじめに

これまで Morse 理論とそれを複素曲面にどのように使うことができるかを学んできた．本論文では, Morse 理論とそれを使って Lefchetz の定理について Andrettii と Frankel による証明をした．次に多様体上のハンドル分解と Morse 理論を使って Poincaré duality について示した．与えられた多様体に付随する関数を逆にすることによって, 証明が完成する．最後に $x^p + y^q + z^r$ について p, q, r の制限を付けてその重複度について調べた．$x^p + y^q + z^r$ のようなプリスコーンファムにおける重複度の計算は知られている．$x^p + y^q + z^r + xyz$ において重複度はどのように表されるのか, 原点以外での臨界点があるのか．また, 重複度はどのように計算できるのかを調べた．

1　Morse 理論

f を多様体 M 上で定義された滑らかな実数値関数とする．点 $p \in M$ において, 誘導された写像

$$f_* : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}$$

が 0 写像の時, p を f の臨界点といい, 実数値 $f(p)$ を臨界値という．p の近傍 U における局所座標系 $(x^1, \cdots, x^n)$ を選んでおくと,

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0$$

が成り立つ．$v, w \in T_pM$ として, $v = \sum a_i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, $w = \sum b_j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$ とするとき, f のヘッシャンと呼ばれる双一次形式 f_{**} を

$$f_{**}(v, w) = \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)$$

として, このとき行列

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right)$$

が退化しないとき, 非退化であるとよばれる．

定義 1.1. 多様体 M 上の関数 $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ の臨界点がすべて非退化であるとき, f を Morse 関数とよぶ．

定理 1.1. M を m 次元の多様体その上の Morse 関数 $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとする．このとき, f を g に変形して, 次の性質を満たすようにできる．
(i)f と g の臨界点の個数は等しく, 任意の指数をもつ臨界点の個数も等しい．
(ii)g の臨界点 p_i, p_j に対して, index(p_i)<index(p_j) ならば $g(p_i) < g(p_j)$ となる．
(iii)index(p_i) =index(p_j) ならば $g(p_i) = g(p_j)$

2 Lefschetz の定理

定理 2.1. $\mathbb{C}^n$ の閉集合として, 両側解析的な写像で埋め込まれた複素 k 次元の複素解析的な多様体 M は, k 次元 CW 複体の homotopy 型をもつ.

定理 2.2. V を複素射影空間 CP^n の中にある複素 k 次元の代数的多様体とする. P を $C\mathbb{P}^n$ 内の超平面であり, (もしあれば)V の特異点をすべて含んでいるとする. そのとき, 包含写像

$$V \cap P \to V$$

は, $k-1$ 次元より低い次元での homology 群の同型を導く.
さらに, 誘導された準同型写像

$$H_{k-1}(V \cap P; \mathbb{Z}) \to H_{k-1}(V; \mathbb{Z})$$

は上への写像である.

定理 2.3. 定理 2.2 と同じ仮定の下, $r < k$ では $\pi_r(V, V \cap P) = 0$

3 Poincaré duality

Morse 関数 f を $-f$

$$-f : M \to \mathbb{R}$$

に取り換える. f と $-f$ の臨界点の集合は等しい. しかし, f に関して指数 λ の臨界点は $-f$ に関して指数 $m-\lambda$ の臨界点になる.
実際 M を指数の順にハンドル分解を

$$M = (h_1^0 \sqcup \cdots \sqcup h_{k_0}^0) \cup (h_1^1 \sqcup \cdots h_{k_1}^1) \cup \cdots \cup (h_1^m \sqcup \cdots \sqcup h_{k_m}^m)$$

とする. $-f$ に付随するハンドル分解はハンドルの心棒と太さそれぞれの円盤が入れ替わり, f での q ハンドル h_k^q は $-f$ で $m-q$ ハンドル h_k^{*m-q} となる. よって

$$M = (h_1^{*0} \sqcup \cdots \sqcup h_{k_m}^{*0}) \cup (h_1^{*1} \sqcup \cdots \sqcup h_{k_{m-1}}^{*1}) \cup \cdots \cup (h_1^{*m} \sqcup \cdots \sqcup h_{k_1}^{*m})$$

とハンドル分解できる. ここでの 0 ハンドル, $\cdots$, m ハンドルの個数は f の m ハンドル, $\ldots$, 0 ハンドルの個数に等しい.
$-f$ に付随したハンドル分解に適合したセル分割を X^* とすれば, チェイン複体

$$\cdots \longrightarrow C_{m-q}(X^*) \xrightarrow{\partial^*_{m-q-1}} C_{m-q-1}(X^*) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(X^*) \xrightarrow{\partial^*_1} C_0(X^*) \longrightarrow$$

を得る.

定理 3.1. 任意の q について下の図式は符号を除いて可換である.

$$\begin{tikzcd} C^q(X) \arrow[r, "\delta^q"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C^{q+1} \\ C_{m-q}(X^*) \arrow[u, "\psi_{m-q}"] \arrow[r, "\partial^*_{m-q}"'] & C_{m-q-1}(X^*) \arrow[u, "\psi_{m-q+1}"'] \end{tikzcd}$$

したがって $\psi_{m-q-1} \circ \partial^*_{m-q} = \pm\delta^q \circ \psi_{m-q}$ が成り立つ.

定理 3.1 より, 各次元 q で同型 $\psi_{m-q} : C_{m-q}(X^*) \to C^q(X)$ を考えれば, チェイン複体

$$\cdots \longrightarrow C_{m-q+1}(X^*) \xrightarrow{\partial^*_{m-q+1}} C_{m-q}(X^*) \xrightarrow{\partial^*_{m-q}} C_{m-q-1}(X^*) \longrightarrow \cdots$$

とコチェイン複体

$$\cdots \longrightarrow C^{q-1}(X) \xrightarrow{\pm\delta^{q-1}} C^q(X) \xrightarrow{\pm\delta^q} C^{q+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

が同型となる. よって, チェイン複体の $m-q$ 次元 homology 群 $H_{m-q}(X^*)(\cong H_{m-q}(M))$ とコチェイン複体の q 次元 cohomology 群 $H^q(X)(\cong H^q(M))$ は同型となる. これで, Poincaré 双対性

$$H_{m-q}(M) \cong H^q(M)$$

が示せた.

4　複素 3 変数多項式

p, q, r を 2 以上の整数として $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} < 1$ となるものとする. このとき

$$f = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q + \frac{1}{r}z^r$$

を考える. この関数の臨界点は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

となる点を考えればよい. $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ のみが解となる.

定理 4.1. $f(z_1, \cdots, z_{n+1}) = (z_1)^{a_1} + (z_2)^{a_2} + \cdots (z_{n+1})^{a_{n+1}}$ を考えると, 原点での重複度は

$$\mu = (a_1 - 1)(a_2 - 1) \cdots (a_{n+1} - 1)$$

となる.

定理 4.1 より f の原点での重複度 μ は $(p-1)(q-1)(r-1)$ となる.
次に

$$g = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q + \frac{1}{r}z^r + xyz$$

について考える.

定理 4.2. $g = \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q + \dfrac{1}{r}z^r + xyz$ において

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

の解 x, y, z のいずれかが 0 ならば他の変数も 0 となる.

$(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 以外の臨界点を考える.
$x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ と仮定してよい. すると $|x| > 0, |y| > 0, |z| > 0$ であるので両辺の絶対値をとって対数をとり整理すると

$$\log|x| = \log|y| = \log|z| = 0$$

となる.

$$|x| = |y| = |z| = 1$$

とわかる. よって $x = e^{i\alpha}, y = e^{i\beta}, z = e^{i\gamma}$ とおき偏角に注目することで

$$\begin{cases} \alpha(p-1) = \beta + \gamma + 2(k-1)\pi \\ \beta(q-1) = \alpha + \gamma + 2(k'-1)\pi \\ \gamma(r-1) = \alpha + \beta + 2(k''-1)\pi \end{cases}$$

となる. これを $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3 \longrightarrow (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$ とみて写像度を計算すると

$$pqr\left\{1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)\right\}$$

となる. p, q, r のとり方からこの値は正である. g において $(0, 0, 0)$ 以外の臨界点の個数が分かる. 原点以外の臨界点を (x_1, y_1, z_1) とおけば, det $H_g|_{(x_1,y_1,z_1)} \neq 0$ となる. よって (x_1, y_1, z_1) は非退化な臨界点ということが分かった.

定理 4.3. 関数 g に対して

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right)$$

が正則行列ならば, その重複度 μ は 1 となる.

上の定理より (x_1, y_1, z_1) での重複度は 1 となることが分かる. $(0, 0, 0)$ 以外の臨界点での重複度の合計は $pqr\left\{1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)\right\}$ となり全体の解の個数は $(p-1)(q-1)(r-1)$ であるので原点での重複度は

$$(p-1)(q-1)(r-1) - pqr\left\{1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)\right\}$$

となる.

参考文献

[1] 服部晶夫, 位相幾何学, 岩波書店
[2] 枡田幹也, 代数的トポロジー, 朝倉書店
[3] 松本幸夫, Morse 理論の基礎, 岩波書店
[4] J.W. ミルナー, 複素超曲面の特異点, 佐伯修, 佐久間一浩訳, シュプリンガー
[5] J.Milnor, モース理論, 吉岡書店
[6] J. W. ミルナー, 微分トポロジー講義, シュプリンガー
[7] JOHN W. MILNOR, JAMES D. STASHEFF, CHARACTERISTIC CLASSES, PRINSTON UNIVERSITYPRESS AND UNVERSITY OF TOKYO PRESS