

$q$ -第六パンルヴェ方程式への  $q$ -ミドルコンボリューションの適用  
Application of  $q$ -Middle Convolution to  $q$ -Sixth Painleve Equation

数学専攻 高木 駿  
Mathematics TAKAGI, Shun

## 1 はじめに

パンルヴェ方程式は、ある線形微分方程式のモノドロミー保存変形により与えられることが知られている [6]. 神保・坂井は、第六パンルヴェ方程式を生じさせる線形微分方程式へのモノドロミー保存変形の類似物として、 $2 \times 2$  行列を用いた連立 1 階型の線形  $q$  差分方程式の変形を考え、 $q$ -第六パンルヴェ方程式を与えた [3].

Middle convolution は Katz により導入され、Dettweiler と Reiter により線形微分方程式の変換として再定式化された [4][5]. 坂井・山口は middle convolution の  $q$ -類似として、 $q$  差分方程式に対する  $q$ -middle convolution を構成した [2]. しかしながら、 $q$ -middle convolution を具体的な  $q$  差分方程式へ適用した結果などは確認されていない.

本論文では、

- $q$ -第六パンルヴェ方程式に関連する線形  $q$  差分方程式へ  $q$ -middle convolution を適用し得られる方程式 (主結果 1)
- 得られた方程式の解の積分表示 (主結果 2)
- $q$ -middle convolution と  $q$ -第六パンルヴェ方程式の対称性 (アフィン・ワイル群) の間の関係 (主結果 3)

について論じる.

## 2 $q$ -middle convolution

次の形をした方程式を  $E_{B,b}$  と表す.

$$Y(qx) = B(x)Y(x), \quad B(x) = B_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{B_i}{1 - \frac{x}{b_i}}$$

ここで、 $B_1, \dots, B_N, B_\infty \in M_m(\mathbb{C})$  である.

**定義 1** ( $q$ -convolution, [2]). 方程式  $E_{B,b}$  から成る空間を  $\mathcal{E}$  とおく.  $E_{B,b} \in \mathcal{E}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  に対し、 $q$ -convolution  $c_\lambda : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  ( $E_{B,b} \mapsto E_{F,b}$ ) を次で定義する.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (F_1, \dots, F_N, F_\infty) \in (M_{(N+1)m}(\mathbb{C}))^{N+1}, \\ F_i &= \begin{pmatrix} & & O & & \\ B_0 & \cdots & B_i - (1 - q^\lambda)I_m & \cdots & B_N \\ & & O & & \end{pmatrix} \text{ ((i+1) 番目), } \quad 1 \leq i \leq N, \\ F_\infty &= I_{(N+1)m} - \widehat{F}, \\ \widehat{F} &= (B_{t-1})_{1 \leq s, t \leq N+1} = \begin{pmatrix} B_0 & \cdots & B_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0 & \cdots & B_N \end{pmatrix}, \quad B_0 = I_m - B_\infty - \sum_{j=1}^N B_j. \end{aligned}$$

定義 2 ( $q$ -middle convolution, [2]).  $\mathcal{V} = \mathbb{C}^m$  とおき,  $\mathcal{V}^{N+1}$  の  $F$ -不変な部分空間  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  を次で定義する.

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} \ker B_0 \\ \vdots \\ \ker B_N \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(\lambda) = \ker(\widehat{F} - (1 - q^\lambda)I_{(N+1)m}).$$

$F_k$  の  $\mathcal{V}^{N+1}/(\mathcal{K} + \mathcal{L})$  への作用を  $\overline{F}_k$  とおく. これを用いて,  $q$ -middle convolution  $mc_\lambda$  を,  $mc_\lambda : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} (E_{B,b} \mapsto E_{\overline{F},b})$  と定義する.

$q$ -convolution は, Jackson 積分

$$\int_0^\infty f(x) d_q x := (1 - q) \sum_{n=-\infty}^\infty q^n f(q^n)$$

を用いて, オイラー変換の  $q$ -類似としての積分表現ができる.

定理 3 (坂井・山口 [2]).  $Y(x)$  を方程式  $E_{B,b}$  の解とする.  $i = 0, \dots, N$  に対し,

$$\widehat{Y}_i(x) = \int_0^\infty \frac{P_\lambda(x, s)}{s - b_i} Y(s) d_q s, \quad b_0 = 0, \quad P_\lambda(x, s) = \prod_{i=0}^\infty \frac{x - q^{i+\lambda+1}s}{x - q^{i+1}s}$$

とし,  $\widehat{Y}(x) = {}^t({}^t\widehat{Y}_0(x), \dots, {}^t\widehat{Y}_N(x))$  とおくと,  $\widehat{Y}(x)$  は方程式  $E_{F,b}$  の解となる.

## 3 主結果

### 3.1 $q$ -第六パンルヴェ方程式への $q$ -middle convolution 適用結果

神保・坂井 ([3]) によって  $q$ -第六パンルヴェ方程式に関係する行列として,

$$A(x) = \begin{pmatrix} \kappa_1((x-y)(x-\alpha) + z_1) & \kappa_2 w(x-y) \\ \kappa_1 w^{-1}(\gamma x + \delta) & \kappa_2((x-y)(x-\beta) + z_2) \end{pmatrix} \quad (1)$$

と与えられている. 行列  $B(x)$  を,

$$B(x) = \frac{A(x)}{c_0(x - ta_1)(x - ta_2)}$$

により定義する.  $c_0$  は直後に定義する  $B_0$  の行列式を 0 にするための定数である. また,

$$B(x) = B_\infty + \frac{B_1}{1 - \frac{x}{ta_1}} + \frac{B_2}{1 - \frac{x}{ta_2}} \quad (2)$$

により  $B_\infty, B_1, B_2$  を定め,  $B_0 = I_2 - B_\infty - B_1 - B_2 = I_2 - B(0)$  とおく. このとき,  $\det B_0 = 0$  となる  $c_0$  は  $\frac{\theta_1}{ta_1 a_2}$  または  $\frac{\theta_2}{ta_1 a_2}$  であるが, 以下では  $c_0 = \frac{\theta_1}{ta_1 a_2}$  として進める.

$\det B_0 = 0, \det B_1 = 0, \det B_2 = 0$  となるから,

$$B_0 \begin{pmatrix} v_{01} \\ v_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる非自明な 3 つのベクトル  ${}^t(v_{i1}, v_{i2}) (i = 0, 1, 2)$  が存在する.  $q$ -convolution の定義に従い,  $F_1, F_2, \widehat{F}, F_\infty$  を定め,  $q$ -middle convolution の定義に従い,  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  を定める. ここで,  $\mathcal{L}$  の基底をとる際に  $1 - q^\lambda = 1 - \frac{\kappa_2 a_1 a_2 t}{\theta_1}$  とする.

定義 2 における  $\bar{F}_k$  にあたる行列を求めていく.  $g_1, g_2$  を適切に定め, 行列  $P$  を,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & v_{01} & 0 & 0 \\ g_1 & g_2 & 1 & v_{02} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_{11} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & v_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_{21} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & v_{22} \end{pmatrix}$$

とおく. この  $P$  を用いて  $\tilde{F}_1 = P^{-1}F_1P$ ,  $\tilde{F}_2 = P^{-1}F_2P$ ,  $\tilde{F} = P^{-1}\hat{F}P$  を定めると,

$$\tilde{F}_1 = \begin{pmatrix} \bar{F}_1 & O \\ * & * \end{pmatrix}, \tilde{F}_2 = \begin{pmatrix} \bar{F}_2 & O \\ * & * \end{pmatrix}, \tilde{F}_\infty = \begin{pmatrix} \bar{F}_\infty & O \\ * & * \end{pmatrix} \quad (\tilde{F}_\infty = I_6 - \tilde{F})$$

と書け,  $2 \times 2$  行列  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_\infty$  が定まる. 以上をまとめて, 次の主結果を得る.

**主結果 1.** (2) を係数行列とする方程式  $Y(qx) = B(x)Y(x)$  に対し  $q$ -middle convolution を適用することで,

$$Y(qx) = \bar{F}(x)Y(x), \quad \bar{F}(x) = \bar{F}_\infty + \frac{\bar{F}_1}{1 - \frac{x}{ta_1}} + \frac{\bar{F}_2}{1 - \frac{x}{ta_2}} \quad (3)$$

が得られる.

また (3) の解について, 以下のことが分かった.

**主結果 2.** 方程式 (3) の解は,

$$\check{y}_1(x) = \frac{(a_1 - a_2)(\kappa_1 qz - 1)(\kappa_2 a_1 a_2 t - \theta_1)t}{\kappa_2 w(\kappa_1 a_1 a_2 t - \theta_1)qz} \int_0^\infty \frac{y_1(s)}{s - x} P_\lambda(x, s) d_{q,s}$$

と書くことができる.

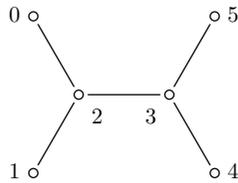
$\check{y}_2(x)$  についても同様の計算を行ったが,  $\check{y}_1(x)$  ほど簡単な形では書けなかった.

### 3.2 $q$ -middle convolution のアフィン・ワイル群の作用による表現

$\tilde{A}(x) = \kappa_2(x - ta_1)(x - ta_2)\bar{F}(x)$  とおく.  $\tilde{A}(x)$  と  $A(x)$  を比較することにより, パラメータや  $y, z$  が  $q$ -middle convolution でどのように変換されるのかが観察された. しかし, [3] ではアフィン・ワイル群の作用が明示されていないため, このままでは  $q$ -middle convolution の表現が得られない.

そこで, 梶原・野海・山田による実現  $q-P(D_5^{(1)})$  を用いる. こちらの實現においては, アフィン・ワイル群  $W(D_5^{(1)})$  の作用が明示的に書き下されている [1].

アフィン・ワイル群  $W(D_5^{(1)})$  は次のディンキン図形,



に対応する.  $W(D_5^{(1)})$  の生成元は  $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  であり, 関係式として  $s_i^2 = \text{id}$  ( $i = 0, 1, \dots, 5$ ),  $s_0 s_1 = s_1 s_0$ ,  $s_0 s_2 s_0 = s_2 s_0 s_2$  などが要請されている. 梶原・野海・山田のレビュー ([1]) では,  $q-P(D_5^{(1)})$  の対称性として次のように  $W(D_5^{(1)})$  の作用が定められている.

$(\kappa_1, \kappa_2, \nu_1, \dots, \nu_8) \in (\mathbb{C}^\times)^{10}$  と,  $(f, g) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  に対し,

$$s_0 : \nu_7 \leftrightarrow \nu_8$$

$$s_1 : \nu_3 \leftrightarrow \nu_4$$

$$\begin{aligned}
s_2 : \nu_3 &\rightarrow \frac{\kappa_1}{\nu_7}, & \nu_7 &\rightarrow \frac{\kappa_1}{\nu_3}, & \kappa_2 &\rightarrow \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\nu_3 \nu_7}, & g &\rightarrow g \frac{f - \nu_3}{f - \frac{\kappa_1}{\nu_7}} \\
s_3 : \nu_1 &\rightarrow \frac{\kappa_2}{\nu_5}, & \nu_5 &\rightarrow \frac{\kappa_2}{\nu_1}, & \kappa_1 &\rightarrow \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\nu_1 \nu_5}, & f &\rightarrow f \frac{g - \frac{1}{\nu_1}}{g - \frac{\nu_5}{\kappa_2}} \\
s_4 : \nu_1 &\leftrightarrow \nu_2 \\
s_5 : \nu_5 &\leftrightarrow \nu_6
\end{aligned} \tag{4}$$

さて,  $q$ -第六パンルヴェ方程式 ( $q$ - $P(D_5^{(1)})$ ) には Lax pair というものが存在する [1]. 具体的な形は本論文を参照のこと. それぞれの Lax pair 間のパラメータや変数の対応を調べ,  $q$ -middle convolution による変換を梶原・野海・山田による実現で書き換えると,

$$\begin{aligned}
\nu_1 &\rightarrow q \frac{\nu_1 \nu_2 \nu_5}{\kappa_2}, & \nu_2 &\rightarrow \nu_2, & \frac{\kappa_1^2 \kappa_2}{\nu_5 \nu_7 \nu_8} &\rightarrow q \frac{\kappa_1^2 \nu_2 \nu_5}{\nu_6 \nu_7 \nu_8}, & \frac{\kappa_1^2 \kappa_2}{\nu_6 \nu_7 \nu_8} &\rightarrow q^2 \frac{\kappa_1^2 \nu_2^2 \nu_5}{\kappa_2 \nu_7 \nu_8}, \\
\frac{\kappa_1}{\nu_7} &\rightarrow \frac{\kappa_1}{\nu_7}, & \frac{\kappa_1}{\nu_8} &\rightarrow \frac{\kappa_1}{\nu_8}, & \nu_3 &\rightarrow q \frac{\nu_2 \nu_3 \nu_5}{\kappa_2}, & \nu_4 &\rightarrow q \frac{\nu_2 \nu_4 \nu_5}{\kappa_2}, \\
f &\rightarrow \tilde{f} = \frac{\frac{(f - \nu_3)(f - \nu_4)}{\left(f - \frac{\kappa_1}{\nu_7}\right)\left(f - \frac{\kappa_1}{\nu_8}\right)} g - \frac{1}{\nu_1}}{\frac{(f - \nu_3)(f - \nu_4)}{\left(f - \frac{\kappa_1}{\nu_7}\right)\left(f - \frac{\kappa_1}{\nu_8}\right)} g - \frac{\kappa_2}{q \nu_1 \nu_2 \nu_5}} f, \\
g &\rightarrow \tilde{g} = \frac{(f - \nu_3)(f - \nu_4)}{\left(f - \frac{\kappa_1}{\nu_7}\right)\left(f - \frac{\kappa_1}{\nu_8}\right)} \frac{\left(\tilde{f} - \frac{\kappa_1}{\nu_7}\right)\left(\tilde{f} - \frac{\kappa_1}{\nu_8}\right)}{\left(\tilde{f} - q \frac{\nu_2 \nu_3 \nu_5}{\kappa_2}\right)\left(\tilde{f} - q \frac{\nu_2 \nu_4 \nu_5}{\kappa_2}\right)} g
\end{aligned}$$

となった. この変換について計算を行ったところ, 以下のことが分かった.

**主結果 3.**  $q$ -middle convolution はアフィン・ワイル群  $W(D_5^{(1)})$  の作用 (4) を用いて,

$$s_5 s_2 s_1 s_0 s_2 s_3 s_2 s_0 s_1 s_2$$

と表される. ただし, 作用は右から順に行う.

## 参考文献

- [1] K. Kajiwara, M. Noumi, Y. Yamada, *Geometric aspects of Painlevé equations*, J. Phys. **A** **50** 073001 (2017)
- [2] H. Sakai, M. Yamaguchi, *Spectral Types of Linear  $q$ -Difference Equations and  $q$ -Analog of Middle Convolution*, International Mathematics Research Notices, Vol. 2016, No. 00, pp. 1 - 39 (2016)
- [3] M. Jimbo, H. Sakai, *A  $q$ -Analog of the Sixth Painlevé Equation*, Lett. in Math. Phys. **38**, 145-154 (1996)
- [4] M. Dettweiler, S. Reiter, *An Algorithm of Katz and its Application to the Inverse Galois Problem*, J. Symbolic Computation. **30**, 761-798 (2000)
- [5] M. Dettweiler, S. Reiter, *Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems*, J. Algebra, **318**, 1-24 (2007)
- [6] 岡本和夫, パンルヴェ方程式, 岩波書店 (2009)