回転数と Poincaré の最終幾何定理
The rotation number and Poincaré's last geometric theorem

数学専攻　橋本 拓斗
HASHIMOTO, Takuto

はじめに

本論文は Poincaré の最終幾何定理についてまとめた総合報告である．

前半では回転数の定義と性質を述べる．回転数とは円周上の同相写像による移動量の時間平均である．回転数の性質のうち特に重要なものは, 回転数が連続であるということである．

後半では本論文の主定理である Poincaré の最終幾何定理を述べる．これは, 半径の異なる 2 つの同心円によって囲まれた円環領域からそれ自身への面積保存写像は不動点を少なくとも 2 つ持つという主張である．この定理は 1912 年に Poincaré が死の直前に予想として発表した [5]．Poincaré 自身は証明には至らなかったが, 翌年 Birkhoff により証明された [1]．このことから, この定理は **Poincaré-Birkhoff の定理**とも呼ばれている．[1] の証明は, 1 つ目の不動点の存在については正しいが, 2 つ目の不動点の存在については正しくなかった．この証明は後に Birkhoff 自身により改良され, 1925 年に発表された [2]．ここでは [1] をもとに 1 つ目の不動点の存在の証明について概要を説明する．

1　回転数の定義と性質

1.1　回転数の定義

ここでは S^1 の同相写像 $\varphi : S^1 \to S^1$ に対して回転数 $\mathrm{rot}(\varphi)$ を定義し, これを利用して φ の性質を調べる．ただし S^1 には自然な向きを入れておき, φ はこの向きを保つものを考える．

回転数を定義するために, まずリフトの概念を定義する．

定義 1.1 (リフト)　I を区間, $\psi : I \to S^1$ を連続写像とする．$\widetilde{\psi} : I \to \mathbb{R}$ が ψ の**リフト** (lift) であるとは, ψ が連続であり, かつ $p \circ \widetilde{\psi} = \psi$ が成り立つことをいう．ただし $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx S^1$ は自然な射影である．また, 連続写像 $\varphi : S^1 \to S^1$ に対して $\varphi \circ p : \mathbb{R} \to S^1$ のリフト $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \to S^1$ を φ のリフトという．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
I \arrow[ur, "\widetilde{\psi}"] \arrow[r, "\psi"'] & S^1
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
S^1 \arrow[r, "\varphi"'] & S^1
\end{tikzcd}
$$

$\varphi : S^1 \to S^1$ が向きを保つ同相写像のとき, そのリフト $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は狭義単調増加である．また φ が全単射であることから, $\widetilde{x} \in \mathbb{R}$ が 1 だけ増加するとき $\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}) \in \mathbb{R}$ も 1 だけ増加する．すなわち

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}+1) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{x}) + 1$$

が成り立つ．このことから $\widetilde{\varphi}$ を φ のリフトの 1 つ, k を整数とすると

$$\widetilde{\varphi} + k : \widetilde{x} \mapsto \widetilde{\varphi}(\widetilde{x}) + k$$

も φ のリフトである．すなわちリフトは整数の分だけ異なるものがある．

リフトを用いて回転数を定義する.

定義 1.2 (回転数)　$\varphi : S^1 \to S^1$ を向きを保つ同相写像とする. $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を φ のリフトの 1 つとして, 1 点 $\widetilde{x} \in \mathbb{R}$ をとって

$$\widetilde{\mathrm{rot}}(\widetilde{\varphi}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{\varphi}^n(\widetilde{x})}{n}$$

とおく. $\widetilde{\mathrm{rot}}(\widetilde{\varphi})$ を $\widetilde{\varphi}$ の**移動数** (translation number) という. $\widetilde{\mathrm{rot}}(\widetilde{\varphi}) \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\mathrm{rot}(\varphi) = \widetilde{\mathrm{rot}}(\widetilde{\varphi}) \mod \mathbb{Z}$$

と定める. この $\mathrm{rot}(\varphi)$ を φ の**回転数** (rotation number) と定義する.

例　円周上の点 x を θ だけ回転させる対応 $x \mapsto x + \theta$ の回転数は θ である.

1.2　回転数の性質

回転数の性質をいくつか挙げる.

定理 1.3 (回転数の共役不変性)　2 つの同相写像 $\varphi, \psi : S^1 \to S^1$ が位相共役[*1] で共役写像 h が S^1 の向きを保つとき $\mathrm{rot}(\varphi) = \mathrm{rot}(\psi)$ が成り立つ.

定理 1.4　向きを保つ同相写像 $\varphi : S^1 \to S^1$ の回転数 $\mathrm{rot}(\varphi)$ について以下が成り立つ.

(1) $\mathrm{rot}(\varphi^m) = m\mathrm{rot}(\varphi)$. [*2] 一般には $\mathrm{rot}(\varphi \circ \psi) \neq \mathrm{rot}(\varphi) + \mathrm{rot}(\psi)$ である.

(2) $\mathrm{rot}(\varphi) = \frac{p}{q}$ が成り立つのは φ が q-周期点を持つとき, そのときに限る. ただし p, q は互いに素な整数で $q \geq 1$ とする. 特に φ が固定点を持つことと $\mathrm{rot}(\varphi) = 0$ は同値である.

次に, 回転数 $\mathrm{rot}(\varphi)$ が離散力学系 φ に関して連続的に変化することを述べる. S^1 の向きを保つ同相写像全体の集合を $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ とおく. $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ にはコンパクト開位相が入っている. [*3]

命題 1.5　向きを保つ同相写像に回転数を対応させる写像

$$\mathrm{rot} : \mathrm{Homeo}_+(S^1) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

は連続写像である.

補足　$\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ には $\|\varphi\| = \|\varphi - \mathrm{id}\|_\infty + \|\varphi^{-1} - \mathrm{id}\|_\infty$ により距離が入るが, これはコンパクト開位相と一致している.

2　Poincaré の最終幾何定理

定理 2.1 (Poincaré の最終幾何定理)　C_a と C_b をそれぞれ半径が a, b $(a > b > 0)$ の同心円とする. C_a と C_b にはさまれた円環領域を R とする. 写像 $T : R \to R$ は

- 1 対 1 で連続

[*1] 2 つの写像 $\varphi, \psi : S^1 \to S^1$ が位相共役であるとは, ある同相写像 h が存在して $\psi \circ h = h \circ \varphi$ が成り立つことである.

[*2] φ^m は φ を m 回反復したもの, すなわち $\varphi^m = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{m}$ である.

[*3] コンパクト開位相とは, 位相空間から位相空間への連続写像全体の集合に入る自然な位相である.

- ツイスト条件：$\widetilde{\mathrm{rot}}(\widetilde{T}|_{C_b}) < 0 < \widetilde{\mathrm{rot}}(\widetilde{T}|_{C_a})$
- 面積保存

を満たしているとする．このとき T には不動点が少なくとも 2 つある (図 1).

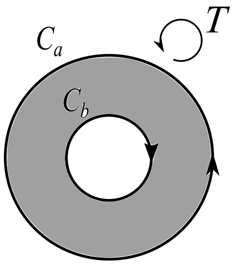

図 1

証明の概要

不動点が 1 つもないと仮定する．

円環を原点方向に ε だけ縮める変換を T_ε とする．T_ε は円 C_a, C_b をそれぞれ円 C'_a, C'_b に写す (図 2). T を作用させたあとに T_ε を作用させる変換を TT_ε と表す．これを**補助変換** (auxiliary transformation) という．

補助変換 TT_ε により C_a は C'_a に写る．C'_a をさらに TT_ε により変換すると単純閉曲線 C''_a に写る．補助変換を繰り返すことで単純閉曲線の列 $C_a, C'_a, C''_a, \ldots$ が得られる．また，この単純閉曲線の列に対応する円環の列 $C_aC'_a, C'_aC''_a, C''_aC'''_a, \ldots$ が得られる．円環の列が途切れるのは，ある曲線 $C_a^{(n)}(n \geq 2)$ の少なくとも一部が円 C_b の内側に入ったときである．このとき C_a 上にある特定の点 P があって，P の n 番目の像は C_b の内側にくる (図 3).

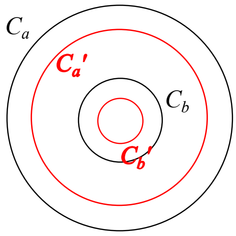

図 2

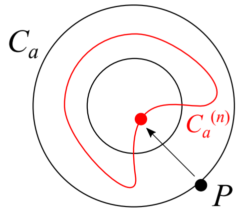

図 3

次に，円環に対応する帯 S を考える．S の上端 C_a 上に点 P をとる．ここで C'_a は C_a より ε だけ下にある直線である．円環 $C_aC'_a, C'_aC''_a, C''_aC'''_a, \ldots$ は S 内の層として表される．P' を補助変換 P の像として 2 つの点を線分で結ぶ PP' の補助変換による像を $P'P''$, $P'P''$ の補助変換による像を $P''P'''$, $\ldots$ とする．これらの曲線をつないで単純曲線 PQ を作る．補助変換によって曲線 PQ は曲線 $P'Q'$ に写る．このとき PQ 上の各点は曲線 PQ' 上で前進する．曲線 PQ は補助変換のもとで不変である．

次に，不変曲線上でのベクトルの回転を考える．正確にいうと，点 P と，P の補助変換による像 P' を結ぶベクトル $\overrightarrow{PP'}$ が不変曲線上でどのように回転するかを考える．まず曲線 PQ' を，点 $P, P'Q, Q'$ を通るように連続的に変形して折れ線にする (図 5). 折れ線上でのベクトルの回転を考えると，$-\pi$ に直線 PP' と直線 QQ' がそれぞれ x 軸となす鋭角を加えたものになる．

次に T によるベクトルの回転を考える．ここでは，点 P と，P による T の像 TP を結ぶベクトル $\overrightarrow{PTP}$ の回

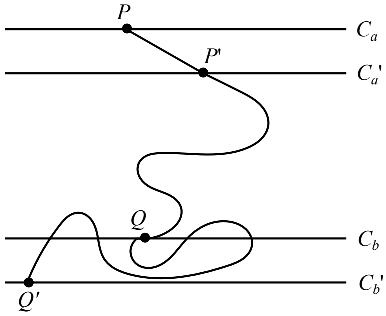

図 4

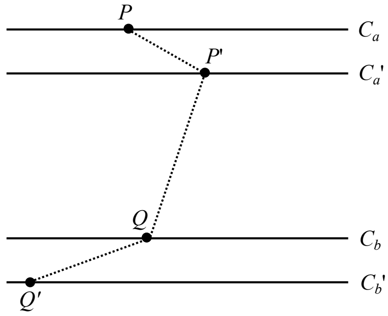

図 5

転を考える．帯 S 内でベクトルを回転させたとき, その回転は $-\pi$ になる (図 6)．T の逆変換 T^{-1} を考える．T^{-1} は C_a 上の点と C_b 上の点をそれぞれ逆方向に動かす．T^{-1} によるベクトルの回転は $+\pi$ である．これらのベクトルは互いに逆方向を向いている．しかしこの 2 つのベクトルの実際の回転はともに $-\pi$ なので矛盾である．こうして 1 つ目の不動点の存在が示せた．

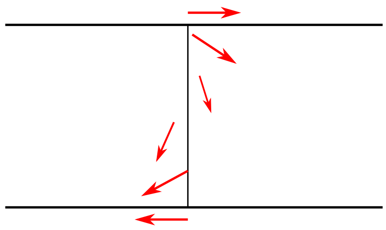

図 6

おわりに

ここでは, Poincaré の最終幾何定理の証明について大まかな証明のアイデアを述べた．この定理の一般化として次の Franks の定理がある．

定理 (Franks, [4])　$T : R \to R$ を円環の同相写像で, 面積保存かつ境界成分を保つものとする．このとき内部に 1 つ周期点を持てば無限個の周期点を持つ．

この定理は, 円環のツイスト条件を緩めて $\widetilde{\mathrm{rot}}(\widetilde{T}|_{C_b}) < \frac{p}{q} < \widetilde{\mathrm{rot}}(\widetilde{T}|_{C_a})$ とすると q-周期点が存在するという主張である．そしてこの状況で周期点の様子を調べていくことが今後の課題である．

参考文献

[1] G. D. Birkhoff(1913), Proof of Poincaré's geometric theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **14**, 14-22.

[2] G. D. Birkhoff(1925), An extension of Poincaré's last geometric theorem, *Acta Math.*, **47**, 297-311.

[3] 久保泉・矢野公一 (2006), 『力学系』, 岩波書店.

[4] J. Franks(1992), Geodesics on S^2 and periodic points of annulus homeomorphisms, *Inv. Math.*, **108**, 403-418.

[5] H. Poincaré(1912), Sur un théorème de géométrie, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **33**, 375-407.