冪乗型非線形シュレディンガー方程式に対する解の時間無限大での漸近挙動

Asymptotics for large time of solutions for nonlinear Schrödinger equations with power type nonlinearities

数学専攻　松本 彗佑

MATSUMOTO, Keisuke

1　はじめに

本論文は, 林仲夫先生と P. I. Naumkin 先生の論文 [7] についての総合報告である. [7] で省略されていた補題や定理の証明における具体的な計算をおこない, それをまとめたものとなっている. [7] では, 本論文のタイトルにもなっている冪乗型非線形シュレディンガー方程式に対する時間無限大での解の漸近挙動について考察をおこなっている. 私は, シュレディンガー方程式の初期値を与えたうえでの時間無限大の解の振る舞いについて興味をもち, 修士 1 年次に林仲夫先生のテキスト [6] をセミナーで読み, 簡単な場合である線形 1 次元シュレディンガー型方程式の場合ついて理解を深めた. その経験から修士 2 年次では [7] をセミナーで扱い, 定理の主張や証明方法などの理解に努めた.

今回扱うのは, 以下の方程式である.

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\dfrac{1}{2}\Delta u + f(u), & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, 非線形項 $f(u)$ は

$$f(u) = \lambda |u|^{\frac{2}{n}} u + \mu |u|^{\eta-1} u \tag{1.2}$$

であり, $\dfrac{2}{n} < \eta - 1$ を満たすとする. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ で, u は複素数値関数である.

$\lambda = 0$ で, かつ, η, δ がいくつかの条件を満たしている場合には, 冪乗型非線形シュレディンガー方程式 (以下 (1.1), (1.2)) において, 散乱理論がたくさんの文献で知られている. 詳しくは [1]–[5], [8]–[10], [13], [14] を参照. さらに, $\lambda = 0$ の場合 (1.1), (1.2) における解の漸近挙動は, 線形シュレディンガー方程式のある解に一致することも知られている. しかし, $\lambda \neq 0$ では一致はしない. 本論文では, (1.1), (1.2) において $\lambda \neq 0$ での解の漸近挙動について考察する.

本論文は, 5 つの章で構成されている. 第 2 章では, 主定理とその証明で必要な記号や関数空間の定義と, 主定理の紹介になっている. 第 3 章では, 主定理の証明をするにあたり必要な補題と, その証明をおこなっている. 第 4 章では, 第 2 章で述べた主定理の証明をおこなっている. 最後の第 5 章では, おわりにと題して, 本論文のまとめと私の研究に関する今後の展望について述べている.

2　導入

記号などを定義していく. 関数 $\varphi(x), x \in \mathbb{R}^n$ におけるフーリエ変換と, 逆フーリエ変換をそれぞれ

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\varphi(x)dx, \quad \mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\varphi(\xi)d\xi$$

と定義し, さらに, $U(t)$ を自由シュレディンガー発展作用素として,

$$U(t)\varphi = \frac{1}{(2\pi it)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{2t}}\varphi(y)dy = \mathcal{F}^{-1}e^{i\frac{t|\xi|^2}{2}}\mathcal{F}\varphi$$

と定義する. $U(t)$ は, 実空間においては $U(t) = e^{i\frac{t\Delta}{2}}$ と書ける.

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ を, 緩増加超関数空間とする. p 乗可積分なルベーグ空間を $L^p = \{\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \|\varphi\|_p < \infty\}$ と書き, ノルムを

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \ (1 \le p < \infty), \quad \|\varphi\|_\infty = \sup_x\{|\varphi(x)|; x \in \mathbb{R}^n\}$$

と定義する. また, 簡単のため $\|\varphi\|_2 = \|\varphi\|$ と書く. 加えて, 重み付きソボレフ空間 $H_p^{m,s}$ を, $H_p^{m,s} = \{\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \|\varphi\|_{m,s,p} = \|(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}(1-\Delta)^{\frac{m}{2}}\varphi\|_p < \infty\}$ と書く. ここで, $m, s \in \mathbb{R}, 1 \le p \le \infty$ である. また, 簡単のため $H_2^{m,s} = H^{m,s}, \|\cdot\|_{m,s,2} = \|\cdot\|_{m,s}$ と書く.

3　冪乗型非線形シュレディンガー方程式における定理

本論文では, 2 つの定理の証明について扱っている. 1 つめの定理は, (1.1), (1.2) における大域解の存在定理である. 具体的には, $\frac{n}{2} < \gamma \le 1+\frac{2}{n}$ としたとき, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $u_0 \in H^{\gamma,0} \cap H^{0,\gamma}$ が $\|u_0\|_{\gamma,0} + \|u_0\|_{0,\gamma} =: \varepsilon' \le \varepsilon$ を満たすとき,

$$u \in C(\mathbb{R}; H^{\gamma,0} \cap H^{0,\gamma}), \quad \|u(t)\|_\infty \le C\varepsilon'(1+|t|)^{-\frac{n}{2}}$$

を満たすただ一つの (1.1), (1.2) の大域解 u が存在するというものである. そしてもう 1 つの定理は, この大域解 u が時間無限大においてどのように漸近挙動していくのかを述べたものである. 具体的に大域解 u の挙動は, 以下の 4 つの式 (3.1) – (3.4) で表される. 任意の $u_0 \in H^{\gamma,0} \cap H^{0,\gamma}$ に対し, $t \ge 1$ で

$$\left\|\mathcal{F}(U(-t)u)(t)\exp\left(i\lambda\int_1^t |u(\tau)|^{\frac{n}{2}}\frac{d\tau}{\tau}\right) - W\right\|_k \le C\varepsilon'(t^{-\alpha+C(\varepsilon')^{\frac{2}{n}}} + t^{-\frac{n}{2}(\eta-1)+1+C(\varepsilon')^{\frac{2}{n}}}) \tag{3.1}$$

$$\left\|\lambda\int_1^t |\widehat{u}(\tau)|^{\frac{2}{n}}\frac{d\tau}{\tau} - \lambda|W|^{\frac{2}{n}}\log t - \varphi\right\|_\infty \le C\varepsilon'(t^{-\alpha+C(\varepsilon')^{\frac{2}{n}}+\delta} + t^{-\frac{n}{2}(\eta-1)+1+C(\varepsilon')^{\frac{2}{n}}+\delta})^{\frac{2}{3}} \tag{3.2}$$

を満たすただ一つの関数 $W \in L^\infty \cap L^2$ と $\varphi \in L^\infty$ が存在し, さらに, t が十分大きい場合の漸近公式と評価式

$$\begin{aligned}
&\left\|u(t,x) - \frac{1}{(it)^{\frac{n}{2}}}W\left(\frac{x}{t}\right)\exp\left(i\frac{|x|^2}{2t} - i\lambda\left|W\left(\frac{x}{t}\right)\right|^{\frac{2}{n}}\log t - i\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right)\right\|_\infty \\
&\le C\varepsilon' t^{-\frac{n}{2}}(t^{-\alpha+C(\varepsilon')^{\frac{2}{n}}+\delta} + t^{-\frac{n}{2}(\eta-1)+1+C(\varepsilon')^{\frac{2}{n}}+\delta})^{\frac{2}{3}}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\left\|\mathcal{F}(U(-t)u)(t) - W\exp(-i\lambda|W|^{\frac{2}{n}}\log t - i\varphi)\right\|_k \le C\varepsilon'(t^{-\alpha+C(\varepsilon')^{\frac{2}{n}}+\delta} + t^{-\frac{n}{2}(\eta-1)+1+C(\varepsilon')^{\frac{2}{n}}+\delta})^{\frac{2}{3}} \tag{3.4}$$

がそれぞれ成り立つ. ここで, $k = 2$ または $k = \infty$ であり, (3.2) に関しては, $\frac{n}{2} + 2\alpha < \gamma \le 1 + \frac{2}{n}$, $C\varepsilon < \alpha < \min\left\{\frac{-n^2+2n+4}{4n}, 1\right\}$ であり, δ は任意の正数, そして φ は実数値関数である.

4　定理の証明の概要

定理の証明の概要を述べる. ここでは, 大域解の存在定理の証明の概要について説明をする. 大域解の存在に関しては, 局所解の存在定理とアプリオリ評価を用いることで示すことができる. 詳しくは [12] を参照. よって, 局

所解の存在定理と, 2 つのアプリオリ評価を紹介する. 関数空間 X_T を, 以下のように定義する.

$$X_T = \{v \in C([-T,T];\mathcal{S}'); |||v|||_{X_T} = \sup_{t\in[-T,T]} (1+|t|)^{-C(\varepsilon')^{\frac{2}{n}}} \|v(t)\|_{\gamma,0} + \sup_{t\in[-T,T]} (1+|t|)^{-C(\varepsilon')^{\frac{2}{n}}} \|U(-t)v(t)\|_{0,\gamma} + \sup_{t\in[-T,T]} (1+|t|)^{\frac{n}{2}} \|v(t)\|_\infty < \infty\}$$

(1.1), (1.2) に対する局所解の存在定理は, $\frac{n}{2} < \gamma \le 1 + \frac{2}{n}$ としたとき, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $u_0 \in H^{\gamma,0} \cap H^{0,\gamma}$ が $\|u_0\|_{\gamma,0} + \|u_0\|_{0,\gamma} =: \varepsilon' \le \varepsilon$ を満たすとき, $T > 1$ と, 区間 $[-T,T]$ で

$$|||u|||_{X_T} \le C\varepsilon'$$

を満たすただ一つの (1.1), (1.2) の局所解 u が存在するというものである. そして, アプリオリ評価の 1 つめは, u が局所解の定理の仮定を満たすとするとき, 任意の $t \in [-T,T]$ に対して

$$(1+|t|)^{-C(\varepsilon')^{\frac{2}{n}}} (\|u(t)\|_{\gamma,0} + \|U(-t)u(t)\|_{0,\gamma}) \le C(\|u_0\|_{\gamma,0} + \|u_0\|_{0,\gamma}) \equiv C\varepsilon'$$

が成り立つというものである. もう 1 つのアプリオリ評価は, $\gamma > \frac{n}{2}$ とし, u が局所解の定理の仮定を満たすとするとき, 任意の $t \in [-T,T]$ で

$$(1+|t|)^{\frac{n}{2}} \|u(t)\|_\infty \le C(\|u_0\|_{\gamma,0} + \|u_0\|_{0,\gamma}) \equiv C\varepsilon'$$

が成り立つというものである. 以上の 3 つを用いることで, 大域解の存在定理を示すことができる.

以下, アプリオリ評価を示すための 4 つの不等式の内容について述べる. これら 4 つの不等式は (1.1), (1.2) の積分系

$$u(t) = U(t)u_0 - i\int_0^t U(t-s)(\lambda|u|^{\frac{2}{n}}u + \mu|u|^{\eta-1}u)(s)ds$$

の両辺の L^∞ や $H^{0,\gamma}$ や $H^{\gamma,0}$ ノルムを考える際, 積分の中身の評価に関して必要になる. 1 つめの不等式は, Gagliardo – Nirenberg – Sobolev 不等式と呼ばれるもので, $1 \le q, r \le \infty$ を満たす任意の q, r と $0 \le j \le m$ を満たす任意の j, m をとったとき, 関数 u が $u \in H_r^{m,0} \cap L^q$ を満たしているならば,

$$\|(-\Delta)^{\frac{j}{2}}u\|_p \le C\|(-\Delta)^{\frac{m}{2}}u\|_r^a \|u\|_q^{1-a}$$

が成立するというものである. ここで, C は u に依存しない定数であり, a は, $\frac{j}{m} \le a \le 1$ を満たす任意の数で, かつ $\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + \frac{1-a}{q}$ を満たす. ただし, $m - j - \frac{n}{r}$ が非負整数のとき, $\frac{j}{m} \le a < 1$ とする. 2 つめの不等式は, $u(t,x)$ を滑らかな関数としたとき, 任意の $\alpha \in [0,1)$ と任意の $\gamma > \frac{n}{2} + 2\alpha$ に対して,

$$\|u(t)\|_\infty \le C|t|^{-\frac{n}{2}} \|\mathcal{F}U(-t)u(t)\|_\infty + C|t|^{-\frac{n}{2}-\alpha} \|U(-t)u(t)\|_{0,\gamma}$$

が $|t| \ge 1$ で成り立つというものである. そして残りの 2 つは, 定数 γ と定数 ρ がそれぞれ $0 < \gamma < \min\left\{2, 1 + \frac{2}{n}\right\}$, $\rho \ge 1 + \frac{n}{2}$ を満たすとしたとき,

$$\|U(-t)|u|^{\rho-1}u\|_{\dot{H}^{0,\gamma}} \le C\|u\|_\infty^{\rho-1} \|U(-t)u\|_{\dot{H}^{0,\gamma}}, \quad \||u|^{\rho-1}u\|_{\dot{H}^{\gamma,0}} \le C\|u\|_\infty^{\rho-1} \|u\|_{\dot{H}^{\gamma,0}}$$

が成り立つというものである. ただし, $\|\varphi\|_{\dot{H}_p^{m,s}} = \||x|^s(-\Delta)^{\frac{m}{2}}\varphi\|_p$ である. これらを用いることにより, アプリオリ評価を示すことができる.

5 おわりに

[7] での定理の証明方法は, 加藤淳先生と F. Pusateri 先生による共著の論文 [11] とは異なった手法を用いている. 私は今後, 修士のうちに触れることができなかった [11] を読み [7] と比較することで, シュレディンガー方程式についてより一層理解を深めていきたいと考えている. それを研究課題として尽力していきたい.

参考文献

[1] J. Ginibre and T. Ozawa, Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimension $n \geq 2$, *Comm. Math. Phys.* **151** (1993), pp. 619–645.

[2] J. Ginibre, T. Ozawa and G. Velo, On the existence of wave operators for a class of nonlinear Schrödinger equations, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **60** (1994), pp. 211–239.

[3] J. Ginibre and G. Velo, On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case ; II Scattering theory, general case, *J. Funct. Anal.* **32** (1979), pp. 1–71.

[4] J. Ginibre and G. Velo, On a class of nonlinear Schrödinger equations with non-local interactions. *Math. Z.* **170** (1980), pp. 109–136.

[5] J. Ginibre and G. Velo, Scattering theory in the energy space of a class of nonlinear Schrödinger equations, *J. Math. Pures Appl.* **64** (1985), pp. 363–401.

[6] 林仲夫, 非線形分散型波動方程式 解の漸近挙動, 岩波数学叢書, 2018.

[7] N. Hayashi and P. I. Naumkin, Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations, *Am. J. Math.* **120** (1998), pp. 369–389.

[8] N. Hayashi and T. Ozawa, Scattering theory in the weighted $L^2(\mathbb{R}^n)$ spaces for some Schrödinger equations, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **48** (1988), pp. 17–37.

[9] N. Hayashi and Y. Tsutsumi, Remarks on scattering problem for nonlinear Schrödinger equations, *Differential Equations and Mathematical Physics, Lecture Note in Math.*, vol. 1285 (I. W. Knowles and Y. Saito, eds.), Springer-Verlag, New York, 1986, pp. 162–168.

[10] N. Hayashi and Y. Tsutsumi, Scattering theory for Hartree type equations, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **46** (1987), pp. 187–213.

[11] J. Kato and F. Pusateri, A new proof of long range scattering for critical nonlinear Schrödinger equations, *Differential Integral Equations* **24** (2011), pp. 923–940.

[12] 松村昭孝・西原健, 非線形微分方程式の大域解 圧縮性粘性流の数学解析, 日本評論社, 2004 (2015).

[13] Y. Tsutsumi, Global existence and asymptotic behavior of solutions for nonlinear Schrödinger equations, Ph.D. thesis, University of Tokyo, 1985.

[14] Y. Tsutsumi, Scattering problem for nonlinear Schrödinger equations, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **43** (1985), pp. 321–347.