AdS/CFT 対応における双対時空への揺らぎと応答の不等式による制限
– Constraint on the dual geometry in the AdS/CFT correspondence from the fluctuation-response inequality –

物理学専攻　守田　智紀
Tomoki Morita

概要

ある種のゲージ理論と高次元の重力理論の間には AdS/CFT 対応 [1, 2] という対応関係が成立することが、超弦理論の枠組みにより予想されている。このためゲージ理論について成立する関係式を、この対応関係を用いて重力理論の枠組みに置き換えることで、重力理論に対する新たな関係式が得られる可能性がある。本論文ではゲージ理論側の設定として、「有限温度の熱浴中を一定の外力を受けながら一定の速度で運動するテスト粒子の系」を考察に用いる。Dechant と Sasa によれば、このような系のテスト粒子の微分易動度と有効温度の間には、一般に『揺らぎと応答の不等式』と呼ばれる不等式が成立する [3]。本論文では、AdS/CFT 対応を用いて揺らぎと応答の不等式を重力理論の枠組みに置き換え、重力理論側でどのような不等式が得られるのかを解析した。重力理論の枠組みには「エネルギー条件」が存在するが、本論文での解析により揺らぎと応答の不等式からは、このエネルギー条件とは独立で異なる条件が得られることがわかった。

1　Sasa-Dechant の提唱

本論文では、温度 T の熱浴中をテスト粒子が外力 F を受けて、一定の速度 v で運動している場合を考える (図 1 の左側の図を参照)。Dechant と Sasa はこのようなテスト粒子の微分移動度と有効温度が平衡近傍で満たすべき不等式として、以下のような「揺らぎと応答の不等式」を提唱した。[3]

$$\left.\frac{T_{\mathrm{eff}}}{\mu_{\mathrm{diff}}}\right|_{v\neq 0} \geq \left.\frac{T_{\mathrm{eff}}}{\mu_{\mathrm{diff}}}\right|_{v=0} = \frac{T}{\mu}. \tag{1}$$

ここで、μ_{diff} は微分易動度であり、$\mu_{\mathrm{diff}} \equiv \frac{\partial v}{\partial F}$ より定義される値である。また、T_{eff} はテスト粒子の感じる有効温度であり、拡散係数 D を用いて、$D \equiv \mu_{\mathrm{diff}} T_{\mathrm{eff}}$ より定義される。$v = 0$ にて系は平衡状態となるため、有効温度 T_{eff} は $v = 0$ で熱浴の温度 T に一致する。また、微分易動度 μ_{diff} は、平衡状態では易動度 $\mu = \frac{v}{F}$ に一致する。(1) は、平衡状態 ($v = 0$) にある系から、非平衡状態 ($v \neq 0$) に系が変化した時に、$\frac{T_{\mathrm{eff}}}{\mu_{\mathrm{diff}}}$ の値が減少することは決してないことを示している。ただし、(1) は平衡近傍で満たされるものであり、$v = 0$ 周りで v^2 のオーダーまで評価した時に成立する。本論文では、(1) を重力理論の枠組みで用いて、双対な重力理論の時空への制限を考察していく。

2　AdS/CFT 対応における解析

前章で考察した系を AdS/CFT 対応を用いて重力理論の枠組みに置き換えると図 1 の右側の図のようになる [4, 5]。ここで z は重力側で新たに表れた空間次元の座標であり、$z = 0$ が時空の境界、$z = z_H$ がブラックホールのホライゾンとなる。$z = 0$（時空の境界）にある端点から $z = z_{\mathrm{H}}$ に向かって弦が垂れ下がっており、端点が外力 F を受けて速度 v で運動した際に、垂れ下がった弦は時空の歪みを受けて端点よりも遅れて追従

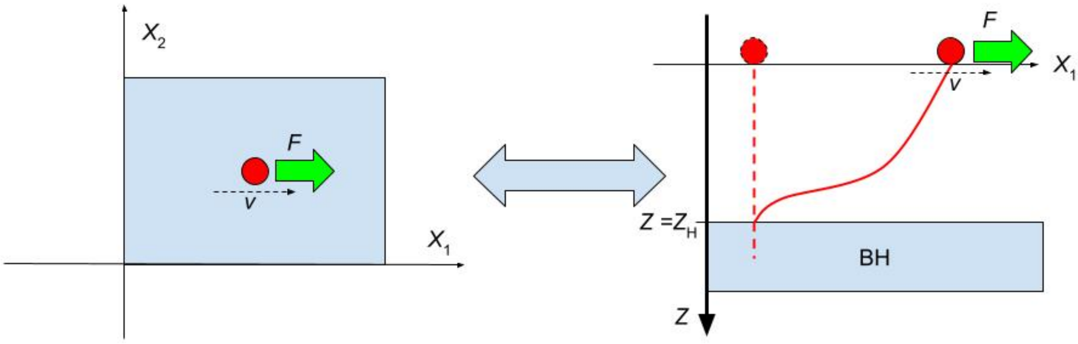

図 1　熱浴中のテスト粒子の重力理論による記述

することになる。有効温度 $T_{\rm eff}$ や微分易動度 $\mu_{\rm diff}$ の導出をするためには弦の運動を考えることが必要になってくる。

本研究では、小川・高柳・宇賀神による文献 [6] で用いられた重力理論のモデルを採用する。このモデルは空間 2 次元の場の理論を記述するために考案され、以下の計量を持つ空間 3 次元の時空を用いる。

$$ds^2 = -z^{-2(m+1)}h(z)dt^2 + z^{2(n-1)}\tilde{h}(z)^{-1}dz^2 + \frac{dx_1{}^2 + dx_2{}^2}{z^2}, \tag{2}$$

ここで z 座標は場の理論には現れない、3 番目の空間座標である。本モデルでは、静的かつ 2 次元空間方向の並進対称性を持つ系を考察するため、計量は時刻と空間座標にはよらないものとする。有限温度系を考えるため、双対な時空として温度 $T_{\rm H}$ のブラックホール時空 (以下 BH 時空と記載) を考える。$z=0$ が時空の境界であり、時空のホライゾンは位置 $z=z_{\rm H}$ に存在する。$z=z_{\rm H}$の近傍で $h(z)\sim\tilde{h}(z)\sim\frac{z_{\rm H}-z}{z_{\rm H}}$ と振る舞うことを仮定し、$h(z)$ と$\tilde{h}(z)$ は以下のように展開できるものとする。

$$h(z) = \alpha_1((z_{\rm H}-z)+\alpha_2(z_{\rm H}-z)^2+....), \quad \tilde{h}(z) = \beta_1((z_{\rm H}-z)+\beta_2(z_{\rm H}-z)^2+....). \tag{3}$$

本論文では、(2) の時空を用いてテスト粒子の微分易動度と有効温度を計算し、Dechant-Sasa の揺らぎと応答の不等式 (1) を適用することで、(2) の時空に対して新たに課される制限を調べる。

2.1　有効温度 $T_{\rm eff}$ の導出

続いて、有効温度 $T_{\rm eff}$ の導出に移る。有効温度 $T_{\rm eff}$ の計算には、時空の計量 (2) ではなく弦の誘導計量 g_{ab} を用いる [7]。g_{00}と ${g_{zz}}^{-1}$ に対して、$z_{\rm s}$ の近傍で $(z-z_{\rm s})$ に対して 1 次までの展開をする。$h(z_{\rm s}) = v^2 {z_{\rm s}}^{2m}$ となることを用いると、g_{00}と ${g_{zz}}^{-1}$ の $(z-z_{\rm s})$ に対する 1 次の展開係数をそれぞれ $a_{\rm eff}$、$b_{\rm eff}$ とすると、

$$a_{\rm eff} = {z_{\rm s}}^{-2(m+1)}h'(z_{\rm s}) - 2v^2 m {z_{\rm s}}^{-3}, \quad b_{\rm eff} = \frac{v^2 \xi'(z_{\rm s})^2}{-2mv^2 z_{\rm s} + {z_{\rm s}}^{-2(m-1)}h'(z_{\rm s})}, \tag{4}$$

が得られる。よって、有効温度 $T_{\rm eff}$ は、

$$T_{\rm eff} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{a_{\rm eff}}{b_{\rm eff}}} = \frac{2mv^2 {z_{\rm s}}^{-1} - {z_{\rm s}}^{-2m}h'(z_{\rm s})}{4\pi v \xi'(z_{\rm s})}, \tag{5}$$

となる。ここで $\xi(z)$ は端点からの弦の「遅れ」であり、この時空の境界上を弦の端点が一定の速度 v で運動する場合の弦の配位を表す関数である。次節では、(5) 内に含まれている $\xi'(z_{\rm s})$ の計算に触れる。

2.2　$\xi'(z_{\rm s})$ の導出

南部・後藤作用を用いて (2) の時空中の弦のラグラジアン L は

$$L = -T_{\rm s}\sqrt{\frac{-v^2 z^{2(n-2)} + z^{2(n-m-2)}h(z) + z^{-2(m+2)}h(z)\tilde{h}(z){\xi'}^2}{\tilde{h}(z)}} \tag{6}$$

となる。よって、$\xi'(z_{\rm s})$ は以下の形で表すことができる。

$$\xi'(z) = \frac{\frac{F}{T_{\rm s}} z^{m+n+1}\sqrt{v^2 z^{2(m+1)} - z^2 h(z)}}{\sqrt{\left((\frac{F}{T_{\rm s}})^2 z^{2(m+2)} - h(z)\right)h(z)\tilde{h}(z)}}. \tag{7}$$

ここで分母・分子の平方根内の値は $z_{\rm s}$で 0 をとる。また $F = \frac{\partial L}{\partial \xi'(z)}$ で与えられる。これにより以下の条件が得られることになる。

$$\frac{F}{T_{\rm s}} = {z_{\rm s}}^{-(m+2)}\sqrt{h(z_{\rm s})}. \tag{8}$$

$$h(z_{\rm s}) = {z_{\rm s}}^{2m}v^2 \tag{9}$$

2.3　時空に対する制限

$\xi(z_{\rm s})$ をさらに具体的に評価するため、テスト粒子の速度 v は十分遅いものとして、

$$z_{\rm s} = z_{\rm H}(1 + \eta_1 v^2 + \eta_2 v^4 + ...), \tag{10}$$

と展開する。(10) において v の偶数乗の項のみが現れるのは、$z_{\rm s}$ の値が速度 v 向きによらないためである。また、$v=0$ の場合 $T_{\rm eff}$ はブラックホールの温度 $T_{\rm H}$ と一致することが物理的に要請される。(5) に対して (3)、(7)、(10) を代入し、この要請を課すことにより、η_1 は α_1 の関数として与えられる。η_2 については以下のように決めることができる。(9) の左辺と右辺の $z_{\rm s}$ に (10) を代入し、v^2 のオーダーで (9) の等号

が成立することを要求すると、η_2 は α_1 と α_2 の関数として与えられる。このようにして η_1、η_2 が、$h(z_{\rm H})$ と $\tilde{h}(z_{\rm H})$ を $(z - z_{\rm H})$ で展開した際の係数を用いて記述できることがわかった。

${\mu_{\rm diff}}^{-1}$ の値は、$\mu_{\rm diff} = T_{\rm s} G_{11}|_{z=z_{\rm s}} + T_{\rm s} v \frac{\partial}{\partial v}\left(G_{11}|_{z=z_{\rm s}}\right)$ より求める。(3)、(10) および、η_1、η_2 をそれぞれ α_1、α_2 および β_1、β_2 で置き換えた式を用いて、${\mu_{\rm diff}}^{-1}$ の値を v の 2 乗まで展開すると、

$$
{\mu_{\rm diff}}^{-1} = T_{\rm s}\left(\frac{1}{{z_{\rm H}}^2} + \frac{6}{\alpha_1} {z_{\rm H}}^{2m-3} v^2\right) \tag{11}
$$

となる。求めた ${\mu_{\rm diff}}^{-1}$ と $T_{\rm eff}$ をかけ、v の 2 乗まで展開すると、

$$
T_{\rm eff}{\mu_{\rm diff}}^{-1} = \frac{{z_{\rm H}}^{-(m+n)}\sqrt{\alpha_1\beta_1}}{4\pi} + \frac{T_{\rm s}}{8\pi}{z_{\rm H}}^{m-n-3}\sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}(6m + 2n + 12 + 5z_{\rm H}\alpha_2 - z_{\rm H}\beta_2)v^2 \tag{12}
$$

となる。ここで (12) の右辺第 1 項目は $T\mu^{-1}$ と等しくなる。Dechant-Sasa の揺らぎと応答の不等式 (1) より、(12) の第 2 項目は正または 0 であることが要求されることにより

$$
z_{\rm H}(\beta_2 - 5\alpha_2) \leq 2(6 + 3m + n) \tag{13}
$$

が要求される。このようにして、新たな制限 (13) が (2) の時空に対して課されることがわかった。

3　まとめと展望

本修士論文では、熱浴中を一定の外力を受けて運動するテスト粒子に対して提唱されている Dechant と Sasa の「揺らぎと応答の不等式」(1) を、AdS/CFT 対応を通じて重力理論の枠内で表現し、双対時空 (2) の計量に対する制限 (13) を得た。これは一般に時空に対して課される null-energy 条件から得られる制限 $m \geq n$ [6] とは独立の、新たな制限である。

今後検討すべき課題としては、以下が考えられる。本研究では具体的な計量 (2) を用いて考察し (13) を得たが、「揺らぎと応答の不等式」(1) は一般に成立する不等式であるため、(2) 以外の様々なモデルについて適用した場合に時空に対する制限はどのように表現されるのか検討する価値がある。そのためには、重力理論側の不等式 (2) を共変な形式で記述することが有用だと考えられる。また、$m \geq n$ の条件は null-energy 条件を $z = z_{\rm H}$ で適用して得られたものであるが、代わりに $z = z_{\rm s}$ で適用することで α_2 や β_2 を含んだ形の null-energy 条件が得られると考えられる。その条件と今回得られた条件 (13) を比較してみるのも興味深い。

参考文献

[1] J. M. Maldacena, Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113 [Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231] [hep-th/9711200].

[2] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **428** (1998) 105 [hep-th/9802109]; E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 253 [hep-th/9802150].

[3] A. Dechant and S.-i. Sasa, arXiv:1804.08250 [cond-mat.stat-mech].

[4] S. S. Gubser, Phys. Rev. D **74** (2006) 126005 [hep-th/0605182].

[5] C. P. Herzog, A. Karch, P. Kovtun, C. Kozcaz and L. G. Yaffe, JHEP **0607** (2006) 013 [hep-th/0605158].

[6] N. Ogawa, T. Takayanagi and T. Ugajin, JHEP **01** (2012), 125 [arXiv:1111.1023 [hep-th]].

[7] S. Nakamura and H. Ooguri, Phys. Rev. D **88** (2013), 126003 [arXiv:1309.4089 [hep-th]].