空洞を持つ浸透流の基礎的解析と実験

Basic analysis and experiment for infiltration into hollow

19N31000008I　岡田　和晃（河川・水文研究室）
Kazuaki OKADA/ River Engineering and Hydrology Lab.

Key Words : *groundwater, Darcy's law, potential velocity theory*

1. はじめに

空洞が存在する土壌内における地下水の挙動は, 流出解析や地下水の解析を行う上で重要な要素である. まず地下水の流れについてToth[1]は, 現地観測を基に観測地下水の流動系を地表面に近い部分から局地流動系, 中間流動系, 地域流動系の3つに分類し, 地域流動系すなわち最も深い位置にある地下水が最も広い範囲に影響を及ぼすとした. 北原[2]は森林土層中において観測と実験を行い, 森林土層全体からの総流出量に占める土層中の空洞を通じた流出量の割合が72～91%になることを明らかにし, 流出解析において空洞からの流れを考慮することの重要性を示した. 土壌中に存在する空洞の周囲の流れに関する実験としては, 佐藤ら[3]の研究が挙げられる. 佐藤らは飽和土中に開けられた円形井戸を土壌中の空洞とみなして空洞の周囲の流れの実験及び解析を行い, 空洞内外の流速や流線や空洞の形状による井戸内外の流速の変化を明らかにした. 本研究において筆者は, 土壌中に空洞が存在し, 空洞内には流れが生じないとした場合に, 土壌内の浸透流の流線の形状や空洞からの流出量を明らかにするため, 連続式とダルシー則を基礎方程式とし, ポテンシャル理論を用いて土壌内の流れに関する解析解を導出した. また, Hele-Shaw型流れの実験を行い, 解析解との比較を行うとともに, 土壌中の物理量を変化させた場合に流線や空洞からの流出量がどのように変化するのかを求めた.

2. 解析対象及び基礎方程式

本研究においては, **図-1**に示すような正円の空洞が存在している土壌における流れ場を解析の対象とした．また基礎方程式として，式(1)及び式(2)に示す連続式及びダルシー則を用いた.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$u=-ki_x, v=-ki_y \tag{2}$$

ここにu:x方向の流速, v:y方向の流速, k:透水係数, i_x:x方向の動水勾配, i_y:y方向の動水勾配とする.

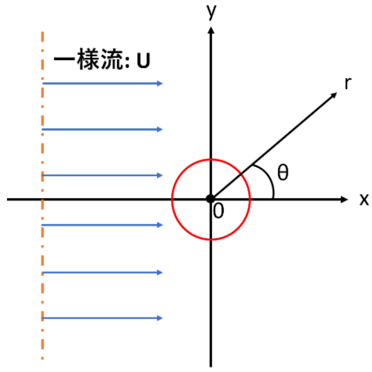

図-1　空洞が存在する土壌中の流れ場の概念図

i_x, i_yについてピエゾ水頭を用いて書き直すと, 式(2)は式(3)の様に表される.

$$i_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(z+\frac{p}{\rho g}\right),\qquad i_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(z+\frac{p}{\rho g}\right) \tag{3}$$

ここでz:位置水頭, ρ:水の密度, g:重力加速度, p:圧力とする. 解析対象である流れ場において, 土壌の性質が均一であるとしてkは常に一定とし, 地下水の流れは非常に遅いことから渦はないとすると, 式(1)に式(2)と式(3)を代入することで式(4)を得る.

$$\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2}=0$$

$$\text{または}\quad \nabla^2\phi(x,y)=0\,, \tag{4}$$

$$(\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})$$

ここで$\phi(x,y)$:流れの速度ポテンシャルとする. 解析対象とする流れ場のように，地盤内に一様な流れが存在し，その中に空洞が存在することにより$\phi(x,y)$が変化すると考えると, **図-1** における$\phi(x,y)$は式(5)のように表せる.

$$\phi(x,y)=-Ux+k\phi_a+\phi_b(x,y) \tag{5}$$

ここでU:一様流の流速, ϕ_a:空洞の中心から地表面までの距離, ϕ_b:空洞の存在による速度ポテンシャルとする.

3. 解析解の導出

式(5)の右辺第 3 項について, 直交座標系から極座標系に変換し変数分離を行うと式(6)の様に表される.

$$\phi_b(x,y)=\phi_b(r,\theta)=R(r)T(\theta) \tag{6}$$

式(6)を式(4)に代入することで式(7)を得る.

$$\nabla^2\phi_b(r,\theta) = \frac{1}{R(r)}\left(r\frac{dR(r)}{dr}+r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2}\right)+\frac{1}{T(\theta)}\frac{d^2T(\theta)}{d\theta^2}(=0) \tag{7}$$

式(7)の右辺第1項及び右辺第2項について, n という定数を用いると式(8)及び式(9)の様に表される.

$$r\frac{dR(r)}{dr}+r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2}=n^2R(r) \tag{8}$$

$$\frac{d^2T(\theta)}{d\theta^2}=-n^2T(\theta) \tag{9}$$

式(8)及び式(9)を解くと式(10)を得る.

$$\phi_b(r,\theta)= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)(c_nr^n+d_nr^{-n}) +(a_0\theta+b_0)(c_0\log r+d_0) \tag{10}$$

なお, $a_n, b_n, c_n, d_n, a_0, b_0, c_0, d_0$: 任意の数列とする. この時 ϕ_b に関して 4 つの境界条件が考えられる.

i) ϕ_b の有界性より, 空洞から無限に遠い地点では流れや空洞の影響が生じないとすると, $r\to\infty$ すなわち r_∞ で c_n=0 が成立する.

ii) 空洞は x 軸回りで対称なので, b_n=0, a_0=0 となる.

iii) 空洞の円周上での圧力は大気圧に等しく, 空洞の半径を a とすると $\phi_b(a,\theta)$=0 が成立する.

iv) i)より r_∞ において, $\phi(r_\infty,\theta)=k\phi_a$ となる.

式(10)において境界条件 i), ii)を考慮すると, 式(5)を直交座標系から極座標系に変換して式(11)の様に表される.

$$\phi(r,\theta)= -Ur\cos\theta+k\phi_a+\sum_{n=1}^{\infty}a_nd_nr^{-n}\cos n\theta+b_0d_0+b_0c_0\log r \tag{11}$$

式(11)において境界条件 iii)を考慮すると, 式(12)を得る.

$$\phi(r,\theta)= -U\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta+k\phi_a+b_0d_0+b_0c_0\log r \tag{12}$$

式(12)において境界条件 iv)を考慮すると, 式(13)を得る.

$$\phi(r,\theta)= -U\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta+k\phi_a\frac{\log\frac{r}{a}}{\log\frac{r_{\max}}{a}} \tag{13}$$

式(13)を極座標系から直交座標系に変換すると, 式(14)を得る.

$$\phi(x,y)= -U\left(x-\frac{a^2x}{x^2+y^2}\right)+k\phi_a\frac{\log\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}}{\log\frac{r_{\max}}{a}} \tag{14}$$

式(14)を x で偏微分することで x 方向流速 u, y で偏微分することで y 方向流速 v が得られ, さらに任意の範囲で積分することで式(17)に示す流れ関数 $\Psi(x,y)$ を得る.

$$u=-\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} =U\left(1+\frac{2a^2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{a^2}{x^2+y^2}\right)+\frac{k\phi_ax}{(x^2+y^2)(\log\frac{a}{r_{\max}})} \tag{15}$$

$$v=-\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y} =\frac{2a^2Uxy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{k\phi_ay}{(x^2+y^2)(\log\frac{a}{r_{\max}})} \tag{16}$$

$$\psi(x,y)=\int udy =Uy+\frac{Ua^2y}{x^2+y^2}+\frac{k\phi_a\tan^{-1}(\frac{y}{x})}{\log(\frac{a}{r_{\max}})} \tag{17}$$

4. 解析解の可視化

式(14)を用いて流線を描画したものが**図-2** である. なお計算条件として, U=1, k=1, ϕ_a=100, a=10, $r_\infty=10^{20}$ とした.

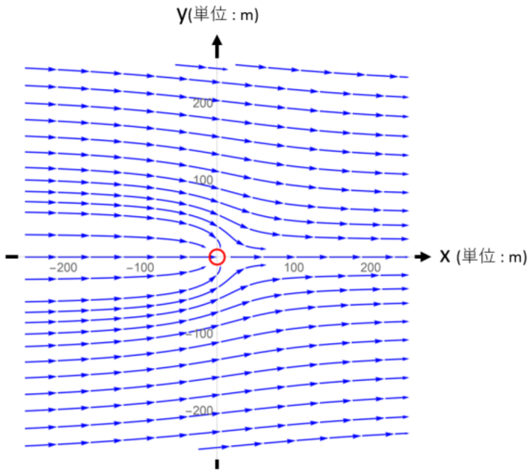

図-2. 式(11)より描画した流線

図-2 より, 空洞に引き込まれる一様流の幅は約 100m で, 空洞の半径の 10 倍程度となり, 佐藤らの結果に比べ 2 倍以上大きくなった.

5. Hele-Shaw型流れ実験

レイノルズ数の小さい, 緩慢な流速の2次元流れは, 平面内の平均流としてポテンシャル流であり, Hele-Shaw型の流れと呼ばれている[4]. 地下水の2次元的な流れを再現するために, 従来よりHele-Shaw型の流れの模擬実験が行われてきた[例えば1]. 筆者は本研究で得られた空洞を持つ浸透流についての解析解及び流線との比較を行うため, 鈴木ら[5]が開発した鉛直方向2次元浸透破壊装置を参考に, 空洞が流れに及ぼす影響を観察するための実験装置を作成した. **図-3**に実験装置の概要を示す.

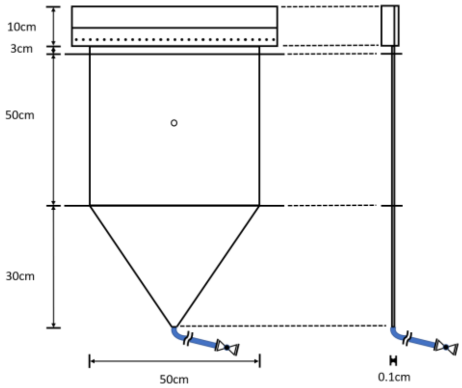

図-3 実験装置の概要

鈴木らの他に, 水平方向でのHele-Shaw型流れ実験装置を開発し実験を行っている研究もある[例えば6]. 本研究において垂直方向の実験装置を作成した理由として, 土壌中において水分の浸透は垂直方向に進行すること, 水平方向に装置を作成した場合, 2つの平板に開けた空洞から流出する水に重力が働き, それぞれの空洞から出てくる流量に差が生じてしまうからといった理由が挙げられる. 装置の材料としては主にアクリル板を用いた. 装置の仕組みとしては, まず最上部に給水部を設け, 平板内に均一な流れが発生するようにした. また給水部内には直径1mmの空洞が1cmおきに並んだ衝立を設置し, そこからトレーサーを流すことで流れの挙動を目視で確認できるようにした. 中段には幅50cm, 長さ50cm, 厚さ1mmの空間に水が流れるようにし, その中心に直径1mmの空洞を開け, 水が流出してくるようにした. 下段部は流速が緩やかに減少するよう下にすぼんでいくような形の空間を作成し, 先端にはバルブを取り付けたホースを接続し, バルブの開閉によって流速を調整できるようにした. 作成した装置の写真を**図-4**に示す. **図-4**の装置を用いてHele-Shaw型流れの実験を行い, 実験によって得られた, 一様な流れが空洞の影響を受けながら流れる様子が**図-5**(a)及び(b)である.

図-4 作成した実験装置

図-5(a) 実験の様子
流れ場の中心から左右2～3cmの範囲で流線が空洞に集まっていることがわかる

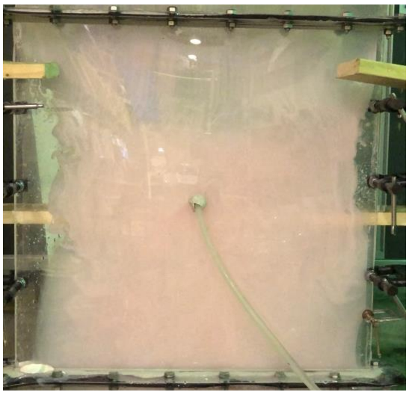

図-5(b) 実験の様子
流れの中心以外の流線は, 空洞の影響を受けて曲線的に流れている

流れを可視化するため, トレーサーに牛乳を赤色に着色したものを用いた. この時下方向の流速は, 目視でおよそ0.03m/sであった. これらより, 一様な流れにおいて流れ全体が空洞による影響を受けつつ流れていく様子や, 空洞に引き込まれる流線の幅がおよそ2～3cmの範囲であることが見て取れる.

6. 解析解による流れ場の表現

第3章において導出した解析解において物理量を変化させることによって, 浸透流の挙動がどのように変化するか明らかにするため, U, k, ϕ_a, aをそれぞれ変化させた時, 空洞に引き込まれる流線の幅を調べ, 空洞からの流出量を求めた. まず空洞からの流出量を求める式を導出する. 式(14)より, 空洞に集まるx, y方向の流量を求めたものが式(15)である.

$$\left(\left(-U\left(1+\frac{2a^2x^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{a^2}{x^2+y^2}\right)+\frac{kx\phi_a}{(x^2+y^2)(-\log a+\log r_{\max})}\right)^2 +\left(-\frac{2a^2Uxy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{ky\phi_a}{(x^2+y^2)(-\log a+\log r_{\max})}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

式(15)を極座標変換すると, 式(16)を得る.

$$a\left(\left(-2U\cos^2\theta-\frac{k\phi_a\cos\theta}{(-\log a+\log r_{\max})}\right)^2 +\left(-2U\cos\theta\sin\theta-\frac{k\phi_a\cos\theta}{(-\log a+\log r_{\max})}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

これを積分することで式(17)に示す空洞からの流出量qを得る.

$$q=\int_0^{2\pi} a\left(\left(-2U\cos^2\theta-\frac{k\phi_a\cos\theta}{(-\log a+\log r_{\max})}\right)^2 +\left(-2U\cos\theta\sin\theta-\frac{k\phi_a\cos\theta}{(-\log a+\log r_{\max})}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

計算結果を**表−6**(a), (b), (c), (d)に示す. なお計算条件として, 4つの物理量のうち１つのみ変化させ, それ以外の値は第4章において可視化を行った際の計算条件と同様にした. なお, b: 空洞に吸収される流線の幅である. **表6−**(a)より, Uが増加するほどbは減少し, qが増加することがわかる. また**表6−**(b)(c)(d)より, k, ϕ_a, aいずれの値も増加するほどbとqが大きくなることが分かる. この結果について, Uが増加すると流れが土壌や空洞の影響を受けにくくなるために, bが減少し, Uが増加した分qが増加したと考えられる. またk, ϕ_a, aについては, 流れに対して抵抗を増加させる物理量であり, これら3つによって流速が減少することでbが増加し, これに伴いqも増加すると考えられる.

	U=0.01	U=0.1	U=1	U=2
b	1000	80	40	30
q	14.4	14.4	80.5	160.3

表6−(a)　Uを変化させた場合

	k=0.5	k=1	k=5	k=10
b	30	40	50	100
q	80.1	80.5	93.5	143.6

表6−(b)　kを変化させた場合

	ϕ_a=50	ϕ_a=100	ϕ_a=500	ϕ_a=1000
b	30	40	100	80
q	80.1	80.5	93.5	143.6

表6−(c)　ϕ_aを変化させた場合

	a=5	a=10	a=20	a=50
b	20	30	60	160
q	41.0	80.5	160.3	400.1

表6−(d)　aを変化させた場合

6. まとめ

本研究で得られた知見を以下に示す.

1) 空洞を持つ土壌中における浸透流について，連続式とダルシー則を基礎方程式とし，ポテンシャル理論に基づいた解析解を導出した.
2) Hele-Shaw型流れの実験装置を作成し, 空洞を持つ2次元のポテンシャル流を再現し, 流線の形状及び空洞に吸収される流線の幅を観察した.
3) 解析解の物理量U, k, ϕ_a, aを変化させた場合において, 空洞に吸収される流線の幅及び空洞からの流出量を明らかにすることで, それぞれの物理量が変化することで浸透流の挙動がどう変化するかを明らかにした.

参考文献

1) J. Toth : A Theoretical Analysis of Groundwater Flow in Small Drainage Basins, Journal of Geophysical Research, No. 16, Vol. 68, 1963
2) 北原曜 : 森林土層中の水移動におけるパイプ孔隙の特性に関する研究, 森林総研研報, No. 367, pp.63-115, 1994
3) 佐藤智宏, 江花亮, 山田正 : 一様流中に置かれた井戸が周りの流速場に与える影響, 水文・水資源学会研究発表会要旨集, 第 20 回, 2007
4) 日野幹雄 : 明解水理学, 丸善, 1983
5) 鈴木輝一, 本吉浩之, 小田匡寛 : 鉛直浸透破壊実験における局所的パイピングに関する考察, 土木学会論文集 C, Col. 63, No. 2, pp.602-611, 2007
6) 鈴木勝雄 : Hele-Shaw 流れ装置の制作, 関西造船協会誌, No. 217, pp.31-43, 1992