

SPH 法を用いた磁性流体の数値解析

Numerical analysis of magnetic fluid by the SPH methods

精密工学専攻 3 号 伊澤 一輝

Kazuki Izawa

1. 序論

磁性流体⁽¹⁾は、もともと自然界に存在しない流体であり、1960 年代に宇宙機器や宇宙服のシール材などの宇宙技術の応用のために人工的に開発された。その特徴として、液体にもかかわらず鉄やニッケルのように磁場に反応し性質や形状を変化させることが挙げられる。磁性流体は、この磁場に反応する性質を利用して様々な分野への応用がなされている。例えば、センサーやモーターなどの工学的応用や、ドラッグデリバリーや温熱療法といった医療分野への応用が挙げられる。しかしながら、研究途上のものや実現可能と思われるアイデアなど未完成なものも多く存在している。このように、将来的に多岐にわたる分野での可能性を秘めた磁性流体を用いた製品を実現するために数値解析の発展が必要だと考える。

磁性流体を水や有機溶媒などの溶媒となる液体の中に強磁性の超微粒子を分散させたコロイド溶液として扱う場合、数値解析の手法としては大別して二種類ある。一つは、有限要素法、差分法、有限体積法などの計算領域をメッシュで分割し、そのメッシュを用いて基礎方程式を離散化する手法である。しかし、上述のメッシュベースの計算手法で解析しようとする、非常に細かいメッシュを切り直す必要があるため、複雑な計算となる。もう一つは、流体の運動を数値解析する手法に、超微粒子の運動を数値解析する手法を組み合わせたものである。そのため、超微粒子の挙動を観察できるといった長所が挙げられるが、流体と固体の相互作用を考慮する必要があるが相当な計算コストがかかるため計算時間が膨大になってしまうといった短所が挙げられる。

本研究では、磁性流体の数値解析における計算時間が膨大になってしまう短所を改善することを研究目標とする。この目標を達成するために本研究では、Fig.1 のように磁性流体を二つの粒子に分割する。一つは、磁性流体における溶媒となる流体の粒子である。もう一つは、溶媒の中に超微粒子が複数存在していると仮定した流体の粒子である。このように磁性流体を二つの流体粒子に分割することで、流体と固体の相互作用を考慮せずに数値解析を行うことで計算時間の短縮を図る。本研究では簡単のため、磁性流体の溶媒の部分を表した粒子を P 粒子、磁性流体の溶媒と微粒子が混在している粒子を M 粒子と呼ぶこととする。また、P 粒子と M 粒子の総称を磁性流体粒子と呼ぶ。解析手法としては、磁性流体を粒子の集合と考えて、粒子のラグランジュ的な動きによって磁性流体の変形を計算し、計算メッシュを必要としない粒子法が適切だと考え、

粒子法の一つである SPH 法⁽²⁾⁽³⁾を採用する。

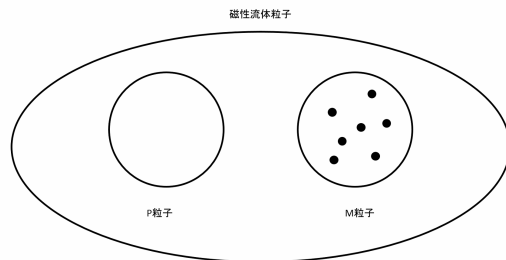


Fig. 1 classification of particle

2. 支配方程式

流体は弱い圧縮性を持つニュートン流体と考える。磁場による外力を考慮した際の流体の支配方程式は、連続の方程式

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} \quad (1)$$

と状態方程式

$$p = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (2)$$

と運動方程式

$$\frac{Dv^\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + \frac{M^\alpha}{\rho} \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^\beta} + g^\alpha \quad (3)$$

の3式で構成される。ここで、 t は時間、 ρ は密度、 p は圧力、 B は圧縮性の度合いを表すパラメータ、 ρ_0 は基準状態の密度、 x^α は直角座標 ($\alpha, \beta = 1, 2$)、 v^α は速度の x^α 成分、 M^α と H^α はそれぞれ磁化と磁場の x^α 成分、 $\sigma^{\alpha\beta}$ は応力テンソルの成分、 D/Dt はラグランジュの微分演算子である。物理量の上付き添字 α, β に対しては総和規約を適用する。応力テンソルの成分 $\sigma^{\alpha\beta}$ は、

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + \mu \left(\frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{2}{3} \frac{\partial v^\gamma}{\partial x^\gamma} \delta^{\alpha\beta} \right) \quad (4)$$

で表される。ここで、 $\delta^{\alpha\beta}$ はクロネッカーのデルタ、 μ は流体の粘性係数を表す。

3.SPH 法による離散化

3.1SPH 法 の 概 念

SPH 法は連続体を粒子の集合とみなし、この粒子上で任意の時間における密度や速度などの物理量を計算する方法である。物体を有限個の粒子に分割し、その任意の点の粒子の集合を用いて近似を行う。空間内の任意の位置 \mathbf{r} での物理量 $\phi(\mathbf{r})$ は、位置 \mathbf{r}' での物理量 $\phi(\mathbf{r}')$ を用いて、

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (5)$$

で与えられる。ここで $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ はディラックのデルタ関数である。ディラックのデルタ関数は以下の性質を持つ。

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} \infty, & \mathbf{r} = \mathbf{r}' \\ 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \end{cases} \quad (6)$$

$$\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 1 \quad (7)$$

ディラックのデルタ関数のような不連続関数は数値計算には適さないため、SPH 法では、以下のように、デルタ関数の代わりに内挿カーネルと呼ばれる広がり h をもつ重み関数 $W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)$ に置き換える。 $\phi(\mathbf{r})$ に対する近似を $\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle$ とすると、

$$\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = \int \phi(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' \quad (8)$$

のように表す。式 (8) の右辺は、ある物理量 $\phi(\mathbf{r}')$ を重み関数によって平均化 (smoothing) された項である。ある物理量 $\phi(\mathbf{r})$ は、カーネル (kernel) と呼ばれる重み関数 W を用いて、重ね合わせることにより、それぞれの粒子が持つ物理量は、連続的な物理量に置き換えられる。つまり、物質の孤立したモデルを連続体のモデルとして扱うことができる。ここで、 $W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)$ は、式 (6)、式 (7) より、以下に示す性質を持つ必要がある。

$$\int_{\omega} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 1 \quad (9)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (10)$$

$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)$ を

$$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = \frac{1}{h^d} f\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{h}\right) \quad (11)$$

のように表すとき、本研究では、関数 f として次の 3 次のスプライン関数を用いる。

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{4}s^3\right), & 0 \leq s < 1 \\ \frac{1}{4\pi} (2-s)^3, & 1 \leq s < 2 \\ 0, & s \geq 2 \end{cases} \quad (12)$$

式 (11) の d は、問題の次元を表すパラメータで、本研究では、2次元問題を扱うので $d = 2$ とする。

次に、式 (8) を空間に離散的に分布する粒子の寄与という表現に変形することを考える。連続体を N 個の粒子の集合体と考える。 j 番目の粒子が占める領域を Ω_j とし、その粒子の重心の位置ベクトルを \mathbf{r}_j とすると、式 (8) は

$$\begin{aligned} \langle \phi(\mathbf{r}) \rangle &= \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega_j} \phi(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' \right] \\ &\approx \sum_{j=1}^N \left[\phi(\mathbf{r}_j) W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) \left(\int_{\Omega_j} d\mathbf{r}' \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^N \phi(\mathbf{r}_j) W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) V_j \end{aligned} \quad (13)$$

となる。ここに、 $V_j = \int_{\Omega_j} d\mathbf{r}'$ は、粒子 j の体積である。そこで、 $\phi(\mathbf{r}_j)$ を $\phi_j = \phi(\mathbf{r}_j)$ とし、粒子 j の密度 ρ_j と質量 m_j を用いて、 $V_j = m_j / \rho_j$ であることを利用すると、式 (13) は、

$$\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \phi_j W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) \quad (14)$$

となる。 ϕ の勾配 $\partial\phi/\partial x^\alpha$ は、カーネルの勾配を計算することに帰着する。すなわち、式 (14) より、

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \approx \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \phi_j \frac{\partial}{\partial x^\alpha} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) \quad (15)$$

となる。さらに、式 (14) と (15) において $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$ として、両辺を粒子 i の重心位置に適応すると、

$$\langle \phi(\mathbf{r}_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \phi_j W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h) \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \right)_i = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \phi_j \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h) \quad (17)$$

を得る。ここで、下付き添字 i, j を粒子を識別するための指標とする。式 (16) と (17) において、表現の簡略化のために、以後、 $\phi_i = \phi(\mathbf{r}_i)$ 、 $W_{ij} = W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h)$ のように表すことにする。したがって、式 (16) と (17) は、

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \phi_j W_{ij} \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \right)_i = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \phi_j \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (19)$$

となる。こうして、粒子 i のもつ物理量 ϕ_i とその勾配 $(\partial\phi/\partial x^\alpha)_i = \partial\phi_i/\partial x_i^\alpha$ が周辺の粒子 j の物理量を用いて表すことができる。式 (18) と (19) を用いて、物理量の運

動と変形に関する方程式を離散化し、粒子が持つ物理量の値を未知量とする代数方程式を粒子ごとに組み立てて解く方法が SPH 法である。このとき、式 (18) と (19) の総和計算は、全粒子について行うのではなく、Fig.2 に示すように、粒子 i を中心とする半径 R の円 (カーネルの影響円) の内部に含まれる粒子のみを対象とする。本研究では、 $R = 2h$ とする。それぞれの粒子 i は、影響円内に存在する他の粒子 j による相互作用を受ける。

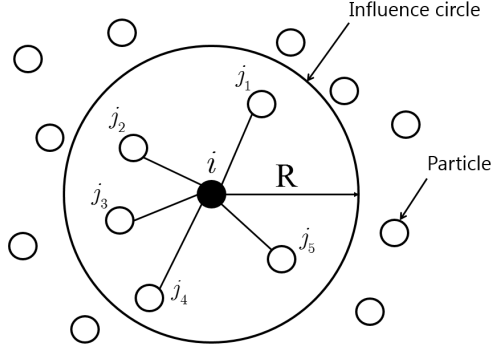


Fig. 2 particle and influence circle

3.2 支配方程式の離散化

SPH 法の理論をに基づいて連続の方程式を離散化すると、

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_{ij}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (20)$$

となる。ここで、 $v_{ij}^\alpha = (v_i^\alpha - v_j^\alpha)$ である。一方、運動方程式を離散化した式は、

$$\begin{aligned} \frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = & \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta} + \sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} - \delta^{\alpha\beta} \Pi_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \\ & + \frac{M^\alpha}{\rho} \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^\beta} + g_i^\alpha \end{aligned} \quad (21)$$

となる。ここで Π_{ij} は人工粘性を表し、圧力の数値振動と粒子同士のすり抜けを防ぐ効果を持ち、次式で表される。

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{A\bar{c}_{ij}\theta_{ij} + B\theta_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & v_{ij}^\alpha x_{ij}^\alpha < 0 \\ 0 & v_{ij}^\alpha x_{ij}^\alpha \geq 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$\theta_{ij} = \frac{h_{ij} v_{ij}^\alpha x_{ij}^\alpha}{x_{ij}^\beta x_{ij}^\beta + 0.01 \bar{h}_{ij}^2} \quad (23)$$

ここで \bar{c}_{ij} , \bar{h}_{ij} はそれぞれ粒子 i と粒子 j の音速とカーネルの大きさの平均を表す。A, B は人工粘性の大きさを調整するパラメータであり、本研究では $A = B = 1.0$ としている。

4. 数値計算

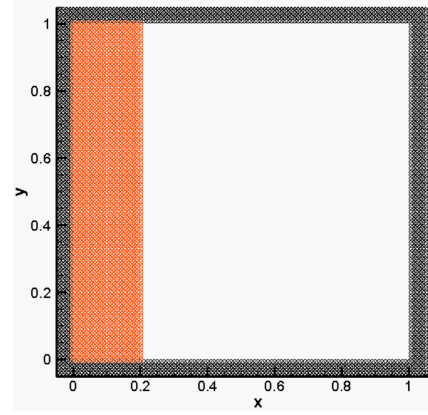


Fig. 3 computation model

計算モデルは、Fig3 に示すように各方向から磁場を印加できるように四方を剛体壁⁽⁴⁾で囲んだ領域の左側に磁性流体粒子の液柱を配置したモデルを用いる。P 粒子の密度は $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, M 粒子の密度は $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$, 重力加速度は $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ とする。SPH 法で用いる粒子は一辺が 0.01 m の正方形で用意する。磁性流体粒子は x 方向に 21 列, y 方向に 101 行で配置し、総数は 2121 個である。また、剛体壁は剛体粒子で表現する。四方の剛体壁の厚さを粒子 5 つ分として配置し、剛体粒子の総数は 2120 個である。つまり、計算モデル全体で用いる粒子は 4241 個である。時間刻みを $\Delta t = 10^{-5} \text{ s}$ とする。また、M 粒子が x 軸正方向に移動するように磁場を印加する。

SPH 法による流れ解析のプログラムが正常に作動していることを確認するために、P 粒子の液中崩壊を Fig.3 に示したモデルの磁性流体粒子の部分に P 粒子を用いて計算する。 $t = 3.0 \text{ s}$ での計算結果を Fig.4 に示す。色の濃淡は密度を表している。P 粒子でできた液中が重力により崩壊していく様子が観察できる。つまり、SPH 法による流れ解析が正常に作動しているといえる。計算時間は $t = 3.0 \text{ s}$ に到達するまで約 2 時間かかった。

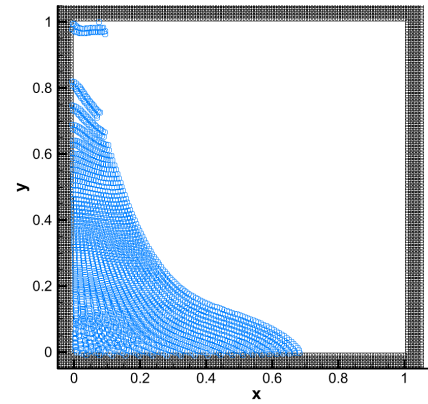


Fig. 4 result of computation(1)

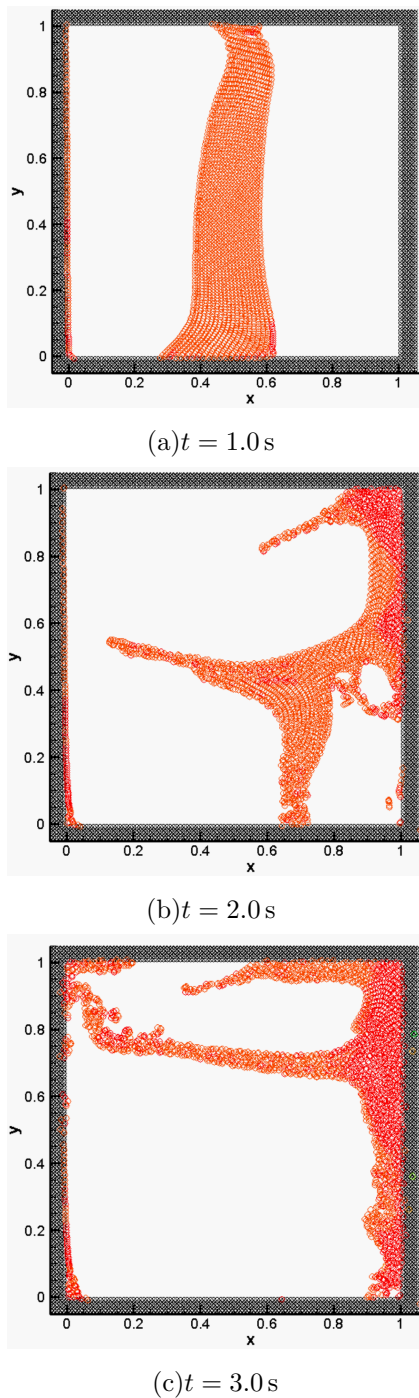


Fig. 5 result of computation(2)

また、磁場を印加した際の粒子の挙動及び計算時間を計測するために、Fig.3 に示したモデルの磁性流体粒子の部分に M 粒子を用いて磁場を印加した時の計算を行う。各時刻 $t = 1.0\text{ s}$, $t = 2.0\text{ s}$, $t = 3.0\text{ s}$ での計算結果を Fig.5 に示す。磁場に反応して M 粒子が x 軸正方向に移動している様子が確認できた。また、右側の剛体壁に衝突した後クラスターの形成過程も確認することができた。しかし、本来であれば左右の剛体壁を結びつけるようにして定着するはずのクラスターが崩壊してしまった。計算時間は $t = 3.0\text{ s}$ に到達するまで約 2.5 時間かった。

5. 終わりに

5.1 研究のまとめ

SPH 法を用いて磁性流体の数値解析手法を構築した。本研究で得られた成果を以下に示す。

1. M 粒子が磁場に反応し、P 粒子とは異なる挙動をとったことが観察できた。また、クラスター形成の過程も観察することができた。
2. 磁性流体の数値解析において、従来の解析手法との計算時間の比較は計算モデルの大きさや条件が各研究で異なるため定量的な比較はできない。しかし、P 粒子の数値解析と M 粒子の数値解析計算時間を比較すると、約 30 分しか差がないことから短縮することができる可能性が十分にあるといえる。つまり、磁性流体の数値解析における計算時間の短縮効果が見込めることを示すことができた。

5.2 今後の展望

1. 磁性流体の数値解析においてクラスター作成の様子を観察することができたが、本来定着するはずのクラスターが崩壊してしまった。その原因として、SPH 法を用いる際に多くのパラメータを使用しており、扱う連続体の性質によって適切な値を設定するべきだがこれに対する経験と知識が足りていないことが考えられる。
2. P 粒子と M 粒子をランダムに配置した、実際の磁性流体により近い計算モデルを用いた数値解析を行い、実際のクラスター形成過程と比較する。
3. 磁性流体を流体の解析手法と微粒子の解析手法を組み合わせた数値解析手法との計算時間の比較を行うべきだと考える。しかし、計算モデルや条件によって計算時間が大きく変動するため、自ら複雑なプログラムを構築する必要がある。

参考文献

- (1) 山口博司, 磁性流体, 森北出版株式会社,(2011)
- (2) 後藤仁志, 粒子法 連続体・混相流・粒状体のための計算科学, 森北出版株式会社, (2018)
- (3) G.R.Liu, M.B.Liu, Smoothed Particle Hydrodynamics : a meshfree particle method, World Scientific Publishing
- (4) S.Adami., X.Y.Hu., N.A.Adams., A generalized wall boundary condition for smoothed particle hydrodynamics, Journal of Computational Physics, (2012) pp.7057-7075.