

ウォータージェットカッターによる 固体切断の数値シミュレーションにおける軸対称計算の導入

Introduction of axisymmetric calculation in numerical simulation of water-jet cutting of solid body

精密工学専攻 41号 浜崎香平
Kohei Hamazaki

1 はじめに

ウォータージェット技術は、直径 0.1mm から 1mm 程度の細いビーム状の高速水噴流によって切断・加工を行う技術のことである。水噴流の単位面積あたりの加工エネルギーは非常に大きく、熱の影響が無いことから、あらゆる材料の加工が可能である。例えば熱に弱い樹脂で作られている自動車のインパネやバンパー、過酷な環境にさらされるロケットに使用されるチタンや炭素繊維複合材など、様々な工業製品の加工にウォータージェット技術が利用されている。

ウォータージェット技術は多くの利点を持つ一方で、高圧水生成時の消費電力が大きくエネルギー効率が悪い。用途や材料に合わせて最適な加工を行うためには、噴射速度や噴射圧力、加工物と噴射ノズルの距離（スタンドオフ距離）、角度などを適切に設定する必要があるが、実験によって材料ごとの最適な条件を見つけることは困難である。一方で解析を用いれば、条件を様々に変えて現象を再現することで、最適な加工が可能になる。

水噴流によって固体を切断する現象は、自由表面流れと固体の変形、破壊を含む複雑な流体-弾性体連成問題である。このような問題を有限要素法を用いて解こうとすると、領域の変形に合わせてメッシュを切り直す必要があり、複雑な計算になってしまう。そこで名取⁽¹⁾は、SPH法 (Smoothed Particle Hydrodynamic method)⁽²⁾ を応用した計算手法を構築した。SPH法は、流体と弾性体をそれぞれ粒子の集合体として表現し、一つ一つの粒子のラグランジュ的な動きを追跡することで流体と弾性体の運動と変形、そして両者の連成を計算する手法である。これにより、水噴流を弾性体に衝突させる計算を行い、噴流の衝突によって弾性体の変形、破壊が進行していく様子を再現していた。しかし、2.3msの結果を得るために、IntelのXeon Gold6126 (2.6GHz, 12コア) を有するワークステーションでの並列計算でおおよそ96時間を要する。実験値と比較するには約2sのシミュレーションをする必要があり、現在の計算機では、実験値との比較は困難である。

そこで本研究では、ウォータージェットカッターによる固体の切削現象を軸対称問題として扱うことによって3次元問題を2次元問題に帰着させることを検討する。これによって、実験値との定量的な比較が可能になることが期待される。

SPH法の円柱座標化の元の概念は、Coleman⁽³⁾によって提案され、より完全な定式化がOmang⁽⁴⁾によって行われた。これらの手法は堅牢であるが、複雑な定式化と計算コストが大きくなる問題があった。そこでBrookshaw⁽⁵⁾は、Colemanらが提案した方法を基に、より単純で計算効率の高い手法を提案した。

本研究ではBrookshawが行った手法を基にして、ウォータージェットカッターによる固体切断のシミュレーションに、軸対称SPH法を導入することを検討する。

2 支配方程式

2.1 流体の支配方程式

水を弱い圧縮性をもつニュートン流体とする。支配方程式を円柱座標 (r, θ, z) で表し、軸対称の仮定に基づいて θ 方向の変化を無視する。このとき、支配方程式は、連続の方程式

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \left(\frac{u^r}{r} + \frac{\partial u^r}{\partial r} + \frac{\partial u^z}{\partial z} \right) \quad (1)$$

と運動方程式

$$\frac{Du^r}{Dt} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma^{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial z} \right) + f^r \quad (2)$$

$$\frac{Du^z}{Dt} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma^{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma^{rz}}{r} \right) + f^z \quad (3)$$

そして、状態方程式

$$p = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (4)$$

となる。ここに、 t は時間、 u^r, u^z は速度の r, z 成分、 $\sigma^{rr}, \sigma^{\theta\theta}, \sigma^{zz}, \sigma^{rz}$ は応力テンソルの成分、 f^r, f^z は外力の r, z 成分、 p は圧力、 ρ は密度、 B は流体の圧縮性の度合いを定めるパラメータ、 ρ_0 は基準密度を表す。また D/Dt はラグランジュ微分演算子である。ここに式(4)の γ は、文献⁽²⁾を参考にして、本研究では $\gamma = 7$ とする。応力テンソルの成分 $\sigma^{\alpha\beta}$ は、変形速度テンソルの成分 $\varepsilon^{\alpha\beta}$ を用いて次のように表される。

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + \mu\varepsilon^{\alpha\beta} \quad (5)$$

ここに、 μ は粘性係数である。上付き添字 α, β については総和規約が適用されるものとする。

2.2 弾性体の支配方程式

固体は線形弾性体とする。弾性体の運動に対する支配方程式は、連続の方程式(1)と運動方程式(2), (3)そして、フックの法則を表す状態方程式

$$p = K \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \quad (6)$$

である。ここに、 K は体積弾性率である。弾性体の応力テンソル $\sigma^{\alpha\beta}$ の成分は、圧力 p と偏差応力テンソルの成分 $s^{\alpha\beta}$ を用いて次のように表される。

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + s^{\alpha\beta} \quad (7)$$

ここで、変形時の物体の回転を考慮した Jaumann stress rate⁽⁶⁾ を用いると、偏差応力の時間変化率 $Ds^{\alpha\beta}/Dt$ が

$$\frac{Ds^{\alpha\beta}}{Dt} = 2G \left(\dot{\varepsilon}^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\dot{\varepsilon}^{\gamma\gamma} \right) + s^{\alpha\gamma}\omega^{\beta\gamma} + s^{\gamma\beta}\omega^{\alpha\gamma} \quad (8)$$

で与えられる。ここに、 G は横弾性係数である。 $\dot{\varepsilon}^{\alpha\beta}$ ひずみテンソルの成分の時間変化率、 $\omega^{\alpha\beta}$ は回転テンソルの成分である。偏差応力テンソルの成分 $s^{\alpha\beta}$ は式(8)を時間積分することにより求めることができる。

3 軸対称 SPH 法による離散化

3.1 軸対称 SPH 法の基本概念

SPH 法は、連続体を粒子の集合とみなし、この粒子上で任意の時間における物理量を計算する方法である。空間内の任意の位置 \mathbf{s} での物理量 $\phi(\mathbf{s})$ に対する近似を $\langle \phi(\mathbf{s}) \rangle$ とすると、広がり h をもったカーネル (Kernel) と呼ばれる連続関数 $W(\mathbf{s}-\mathbf{s}', h)$ を用いて、

$$\langle \phi(\mathbf{s}) \rangle = \int \phi(\mathbf{s}') W(\mathbf{s}-\mathbf{s}', h) d\mathbf{s}' \quad (9)$$

のように表すことができる。ここで、 $W(\mathbf{s}-\mathbf{s}', h)$ は、

$$W(\mathbf{s}-\mathbf{s}', h) = \frac{1}{h^2} f\left(\frac{|\mathbf{s}-\mathbf{s}'|}{h}\right) \quad (10)$$

であり、本研究では、関数 f として 3 次のスプライン関数を用いる。連続体を N 個の粒子の集合と考えると、式 (9) の右辺は、

$$\langle \phi(\mathbf{s}) \rangle = \sum_{j=1}^N \phi_j W(\mathbf{s}-\mathbf{s}_j, h) V_j \quad (11)$$

のように離散化される。ここに V_j , \mathbf{s}_j はそれぞれ j 番目の粒子の体積、位置ベクトルを表し、 $\phi_j = \phi(\mathbf{s}_j)$ である。

軸対称問題において、粒子は Fig.1 に示すようなリングとみなせる。その質量は $m_j = 2\pi r_j \rho_j V_j$ であり、以下のように表される。

$$m_j = V_j \eta_j \quad (12)$$

ここで、 η_j は、

$$\eta_j = 2\pi r_j \rho_j \quad (13)$$

で定義される 2 次元円柱密度である。このとき、 V_j はリングとして表されている粒子の断面積である。

式 (13) を粒子 i に適用すると、粒子 j の ϕ の値 ϕ_j が、周辺の粒子 j の値を用いて、

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\eta_j} \phi_j W_{ij} \quad (14)$$

のように表される。粒子 i の微係数 $(\partial\phi/\partial r)_i$ は、

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_i = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\eta_j} \phi_j \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_i} \quad (15)$$

のようにカーネル W を偏微分することで求められる。

式 (14), (15) の総和計算は、粒子 i を中心とする半径 R の円 (影響円) の内部に含まれる粒子のみを対象とする。本研究では、 $R = 2h$ とする。

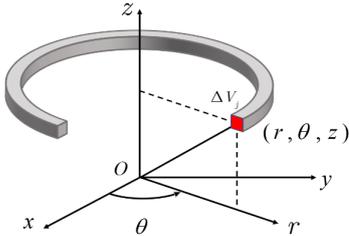


Fig. 1: A model of a SPH particle in the cylindrical coordinate system

3.2 流体の支配方程式の離散化

連続の方程式 (1) を軸対称 SPH 法の理論に基づいて離散化すると、

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_i = -\eta_i \frac{u_i^r}{r_i} + \sum_{j=1}^N m_j \left(u_{ij}^r \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_i} + u_{ij}^z \frac{\partial W_{ij}}{\partial z_i} \right) \quad (16)$$

となる。ここに、 $u_{ij}^r = u_i^r - u_j^r$, $u_{ij}^z = u_i^z - u_j^z$ である。運動方程式 (2)(3) を離散化した式は、

$$\left(\frac{Du^r}{Dt}\right)_i = -2\pi \frac{\sigma_i^{\theta\theta}}{\eta_i} + 2\pi \sum_{j=1}^N m_j \frac{(\sigma_j^{rr} r_j + \sigma_i^{rr} r_i)}{\eta_i \eta_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_i} + 2\pi \sum_{j=1}^N m_j \frac{(\sigma_j^{rz} r_j + \sigma_i^{rz} r_i)}{\eta_i \eta_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial z_i} + f_i^r \quad (17)$$

$$\left(\frac{Du^z}{Dt}\right)_i = 2\pi \sum_{j=1}^N m_j \frac{(\sigma_j^{rz} r_j + \sigma_i^{rz} r_i)}{\eta_i \eta_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_i} + 2\pi \sum_{j=1}^N m_j \frac{(\sigma_j^{zz} r_j + \sigma_i^{zz} r_i)}{\eta_i \eta_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial z_i} + f_i^z \quad (18)$$

となる。状態方程式 (4) を離散化した式は、以下で与えられる。

$$p_i = B \left[\left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (19)$$

3.3 弾性体の支配方程式の離散化

弾性体の運動に対する連続の方程式と運動方程式は、それぞれ式 (16) と式 (17), (18) のように離散化される。状態方程式 (6) を離散化した式は、以下で与えられる。

$$p_i = K \left(\frac{\rho_i}{\rho_0} - 1 \right) \quad (20)$$

4 軸対称計算のテクニック

4.1 対称軸境界

対称軸 ($r = 0$) からの粒子の流出を防ぎ、対称軸付近の粒子の等方性を保つために鏡像法による境界を設ける。Fig.2 に示すように、対称軸から $2h$ 以内に位置する粒子に対応した粒子 (以後、ゴースト粒子と呼ぶ) を、対称軸を横切って対称な位置に配置する。位置 (r, z) 、速度 (u^r, u^z) 、質量 m 、密度 ρ 、応力 $(\sigma^{rr}, \sigma^{\theta\theta}, \sigma^{zz}, \sigma^{rz})$ の物理量を持つ粒子について、対応するゴースト粒子は位置 $(-r, z)$ 、速度 $(-u^r, u^z)$ 、質量 m 、密度 ρ 、応力 $(\sigma^{rr}, \sigma^{\theta\theta}, \sigma^{zz}, -\sigma^{rz})$ の物理量を持つ。

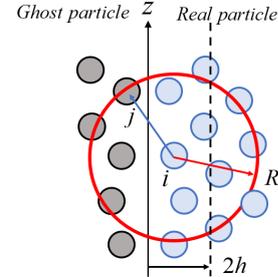


Fig. 2: Schematic of mirrored particles

4.2 接触境界法

円柱座標系において、対称軸 ($r = 0$) 付近の粒子は解の特異性を持つ。運動方程式や連続の式は $1/r$ を含むため、粒子が過度

に対称軸へ近づくと発散する可能性がある．そのため，粒子が対称軸へ過度に近づくことを抑制し，特異点の問題を解決する必要がある．

Wang⁽⁷⁾はこの問題を解決するために接触境界法を提案した．この方法は対称軸へ接近した粒子に接触力を与えることにより，粒子が過度に対称軸へ接近することを防ぐ．接触力 F_r は

$$F_r = \begin{cases} (1 - \xi) \left[\frac{2m}{(\Delta t)^2} (d_0 - r) \right] & d_0 - r > 0 \\ 0 & d_0 - r \leq 0 \end{cases} \quad (21)$$

で与えられる．ここで， Δt は時間刻み， d_0 は接触検出のための閾値であり，本研究では粒子の半径とする． ξ は許容される粒子の浸透の程度を定義する係数である． ξ を用いると，対称軸に接する物体の変形を模倣する効果がある．

4.3 修正関数

対称軸付近の解の特異性による計算の精度悪化を改善するために，Senz⁽⁸⁾らの提案した修正関数を導入する．この手法は， z 軸から $2h$ 以内に位置する粒子にのみ影響する修正関数 f_1 ， f_2 を用いて，対称軸付近の粒子の密度を補正し，対称軸の特異点の問題を回避する．補正された2次元円柱密度 $\hat{\eta}_i$ は，

$$\hat{\eta}_i = \eta_i \times f_1^i \quad (22)$$

で与えられる．補正された運動方程式は，

$$\left(\frac{Du^r}{Dt} \right)_i = -2\pi \frac{\sigma_i^{\theta\theta}}{\hat{\eta}_i} + 2\pi \sum_{j=1}^N m_j \frac{(\sigma_j^{rr} r_j + \sigma_i^{rr} r_i)}{\hat{\eta}_i \hat{\eta}_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_i} + 2\pi \sum_{j=1}^N m_j \frac{(\sigma_j^{rz} r_j + \sigma_i^{rz} r_i)}{\hat{\eta}_i \hat{\eta}_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial z_i} + f_i^r \quad (23)$$

$$\left(\frac{Du^z}{Dt} \right)_i = 2\pi \sum_{j=1}^N m_j \frac{(\sigma_j^{rz} r_j + \sigma_i^{rz} r_i)}{\hat{\eta}_i \hat{\eta}_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_i} + 2\pi \sum_{j=1}^N m_j \frac{(\sigma_j^{zz} r_j + \sigma_i^{zz} r_i)}{\hat{\eta}_i \hat{\eta}_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial z_i} + f_i^z \quad (24)$$

となる．補正された連続の式は，以下のように与えられる．

$$\frac{D\hat{\eta}_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j (f_1^i u_i^r - f_2^i u_j^r) \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_i} + \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\partial f_1^i}{\partial r_i} u_i^r - \frac{\partial f_2^i}{\partial r_i} u_j^r \right) W_{ij} + f_1^i \sum_{j=1}^N m_j (u_i^z - u_j^z) \frac{\partial W_{ij}}{\partial z_i} - \hat{\eta}_i \frac{u_i^r}{r_i} \quad (25)$$

5 数値計算

5.1 円筒形容器内の静水圧

流体の圧力計算の精度を検証するために，円筒容器内の静水圧を計算する．各寸法を Fig.3 のように定める．流体は水で，物性値は密度 $\rho = 1000\text{kg/m}^3$ ，粘性係数 $\mu = 1.307 \times 10^{-3}\text{Pa}\cdot\text{s}$ ，重力加速度 $g = 9.81\text{m/s}^2$ とする．時間増分は $t = 10^{-6}\text{s}$ である．円筒容器は剛体とし，剛体粒子で表現する．対称軸には鏡像境界を課す．粒子の大きさは 0.05m とし，水粒子は 400 個，剛体粒子は 172 個とする．初期状態において，すべての粒子は圧力 $p = 0$ ，密度は基準密度 ρ_0 とする．

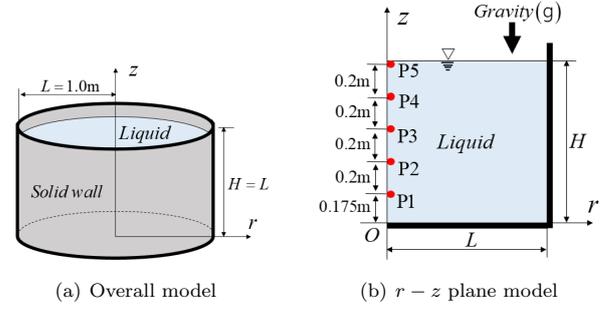


Fig. 3: Computational model for computing the hydrostatic pressure in a tank

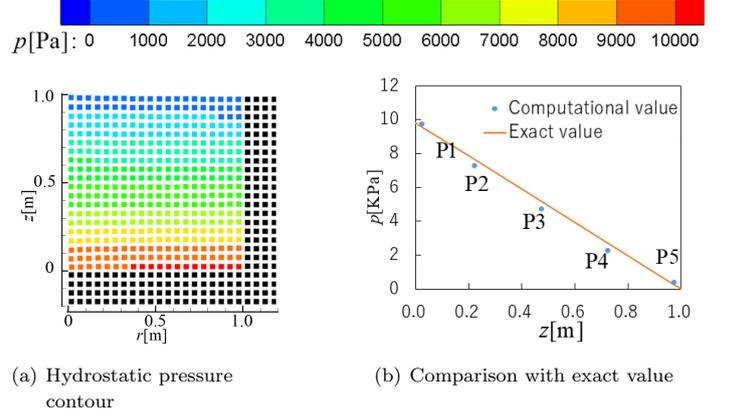


Fig. 4: State of hydrostatic pressure of water in the tank

Fig.4(a) に時刻 $t = 0.3\text{s}$ における円筒容器内の静水圧分布を示す．容器の底の方へいくにつれて圧力が大きくなる様子が見られる．Fig.4(b) に時刻 $t = 0.3\text{s}$ における点 P1 から点 P5 での静水圧の計算結果と厳密解との比較を示す．全ての点で厳密解との良い一致を得た．

5.2 円筒形弾性体の垂直応力

弾性体の応力計算の精度を検証するために，円筒形の弾性体を剛体壁面に静置させた時の弾性体内部の垂直応力を計算する．4章で説明した，接触境界法と修正関数をそれぞれ導入した計算を行い，それらの手法を導入していない場合の結果と比較し，その効果を検証する．

各寸法を Fig.5 のように定める．弾性体は木片で，物性値は密度 $\rho = 500\text{kg/m}^3$ ，縦弾性係数 $K = 3.25\text{MPa}$ ，横弾性係数 $G = 0.69\text{MPa}$ ，重力加速度 $g = 9.81\text{m/s}^2$ とする．時間増分は $t = 10^{-6}\text{s}$ である．対称軸には鏡像境界，底には剛体粒子を配置する．粒子の大きさは 0.05m とし，弾性体粒子は 400 個，剛体粒子は 80 個とする．初期状態において，すべての粒子は圧力 $p = 0$ ，密度は基準密度 ρ_0 とする．

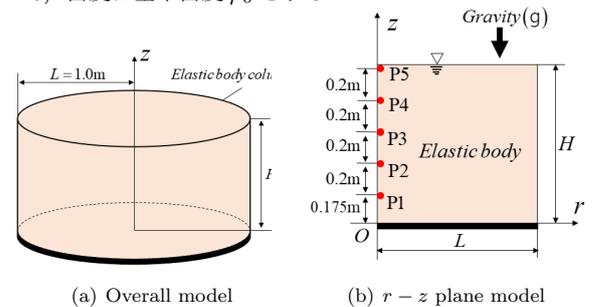
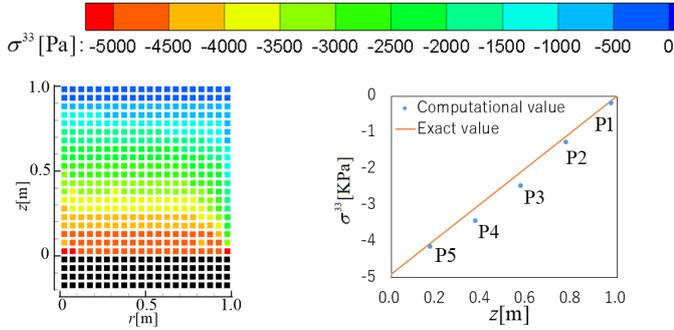


Fig. 5: Computational model for computing the normal stress of solid

5.2.1 計算結果

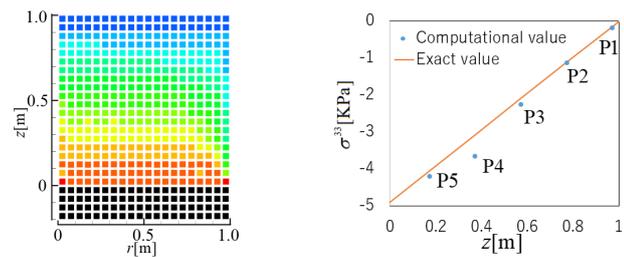
対称軸付近の解の特異性を扱う手法を導入していない場合の、時刻 $t = 0.3\text{s}$ における弾性体の垂直応力分布と、点 P1 から点 P5 での垂直応力の計算値と厳密解の比較を Fig.6 に示す。ここで垂直応力の厳密解は $\sigma^{zz} = \rho_0 g (H - z)$ で与えられる。弾性体の底の方へ向かうにつれて垂直応力が大きくなる様子がみられる。しかし、点 P3 と P4 において垂直応力の計算値が厳密解よりも大きくなった。これは、対称軸付近の解の特異性による計算精度の悪化が一因であると考えられる。



(a) Normal stress contour (b) Comparison with exact value
Fig. 6: Normal stress of elastic body on a plane

5.2.2 接触境界法の導入

接触境界法を導入した場合の、時刻 $t = 0.3\text{s}$ における弾性体の垂直応力分布と、点 P1 から点 P5 での垂直応力の計算値と厳密解の比較を Fig.7 に示す。5.2.1 項の結果と比較して、点 P3 の計算値は厳密解に近づいたが、点 P4 の計算値と厳密解との差が大きくなった。この原因について考察する。接触力 Fr の大きさは z 軸方向に依存していないのに対し、弾性体の応力は底の方に行くにつれて大きくなる。そのため、弾性体の下方で接触力が十分に機能していないと考えられる。したがって、 z 軸方向の依存を考慮した接触力の定式化ができれば、対称軸付近の解の特異性による計算精度の悪化を改善することが期待できる。

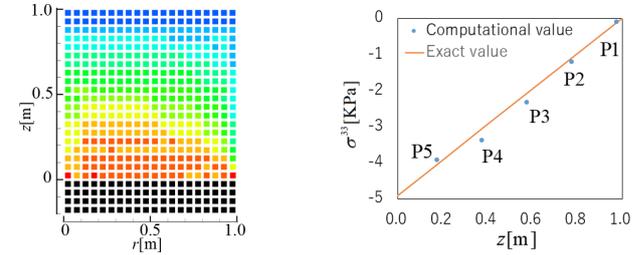


(a) Normal stress contour (b) Comparison with exact value
Fig. 7: Normal stress of elastic body on a plane

5.2.3 修正関数の導入

修正関数を導入した場合の、時刻 $t = 0.3\text{s}$ における弾性体の垂直応力分布と、点 P1 から点 P5 での垂直応力の計算値と厳密解の比較を Fig.8 に示す。5.2.1 項の結果と比較して、全ての計算点で垂直応力が小さくなり厳密解に近づいたが、垂直応力の分布が定性的に不自然な結果となった。この原因について考察する。修正関数は、Senz らが高速のガスの流れ解析などに用いた手法であり、計算結果に粘性項が大きく影響する水や弾性体のための定式化が行われていない。そのため、粘性項を構成

する偏差応力テンソルの計算に修正関数を導入するための一貫した扱いが含まれていない。これが、垂直応力の分布が定性的に不自然な結果になった一因であると考えられる。したがって、偏差応力テンソルに修正関数を導入した定式化が行えれば、対称軸付近の解の特異性による計算精度の悪化の問題を改善することが期待できる。



(a) Normal stress contour (b) Comparison with exact value
Fig. 8: Normal stress of elastic body on a plane

6 おわりに

ウォータージェット加工シミュレーションに軸対称計算を導入するために、軸対称 SPH 法を用いた流体と弾性体の計算プログラムを構築した。流体計算では、厳密解と比較して良好な結果を得た。弾性体計算では、計算領域の一部で垂直応力が厳密解よりも大きくなった。この問題に対し接触境界法と修正関数を導入したが、良好な結果は得られなかった。しかし計算結果から、それぞれの手法に改善の余地があることを示した。

参考文献

- [1] 名取拓弥, SPH 法を用いたウォータージェットカッターによる固体切断の数値シミュレーション, 修士論文, 中央大学 (2019).
- [2] J. J. Monaghan, Smoothed Particle Hydrodynamics, Annual Review of Astrophysics, **30** (1992) pp. 543–574.
- [3] S. C. Coleman and V. G. Bicknell, Jets With Entrained Clouds-I. Hydrodynamic Simulations and Magnetic Field Structure, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **214** (1985) pp. 337–355.
- [4] M. Omang, S. Borve and J. Trulsen, SPH in Spherical and Cylindrical Coordinates, Journal of Computational Physics, **213** (2006) pp. 391–412.
- [5] L. Brookshaw, Smooth particle hydrodynamics in cylindrical coordinates, Australia and New Zealand Industrial and Applied Mathematics Journal, (2003) pp. 114–139.
- [6] J. K. Chen, J. E. Beraun and C. J. Jih, An improvement for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics, Computational Mechanics, **23** (1999) pp. 279–287.
- [7] J. Wang, D. Chan and J. Zhang, Stable axisymmetric SPH formulation with no axis singularity, International Journal For Numerical and Analytical Methods In Geomechanics, **40** (2016) pp. 987–1006.
- [8] D. G. Senz, Devising and validating an axisymmetric smoothed particle hydrodynamics code, Doctoral Thesis, Polytechnic University of Catalonia, (2012).