SPH 法を用いた流体－構造連成問題の数値解析

Numerical Analysis of fluid-structure interaction problems by the SPH method

精密工学専攻　54 号　安室　侑
Yu Yasumuro

1. はじめに

日本では，これまでに海溝型の大規模な地震が多数発生している．それに伴い発生した津波によって沿岸部を中心に甚大な津波被害を受けている．また東日本大震災の際に発生した巨大津波はこれまで津波に強いと考えられていた鉄筋コンクリートの建物を破壊，あるいは転倒させるなどの大きな被害をもたらした．今後被害を抑えるために被害の大きさを予測すること，建築物の津波に対する構造の安全性を確保することが重要となってくる．しかし，これまでの津波解析は海底で発生した地震によってどのような規模の津波が震源地で発生し，沿岸部でどれくらいの波高になるのか，浸水域はどこまで広がるのか，といった点でのシミュレーションが中心だった．しかし，被害予測に役立つシミュレーションを行うためには漂流物による構造物の変形や破壊，および 2 次漂流を含めて総合的な現象を扱う必要がある．

津波による構造物の変形と破壊は，自由表面流れと構造物の変形，破壊が連成する複雑な流体－構造連成問題である．このような問題を有限要素法を用いて解こうとすると，液体と固体が占める領域の変形に合わせて計算メッシュを切り直す必要があり，複雑な計算となってしまう．そこで本研究では連続体を粒子の集合と考え，粒子のラグランジュ的な動きによって連続体の変形を計算する SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics) 法 [1] を用いる．

本研究では，構造物に影響を与える漂流物として弾性体を用いる．また、津波を発生させるにあたり水槽の計算モデルを構築する．そのモデルを用いた流体－構造連成問題の計算結果を報告する．

2. 基礎方程式

2.1 流体の支配方程式

現象を 2 次元とする．計算において扱う水を，弱い圧縮性をもつニュートン流体とする．流れの支配方程式は，連続の方程式

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} \tag{1}$$

と運動方程式

$$\frac{Dv^\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + f^\alpha \tag{2}$$

そして，状態方程式

$$p = p_0\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma - 1\right] \tag{3}$$

である．ここで，t は時間，ρ は密度，x^α は直角座標 ($\alpha = 1, 2$)，v^α は速度の x^α 成分，p は圧力，$\sigma^{\alpha\beta}$ は応力テンソルの成分，f^α は外力の x^α 成分を表す．p_0 と ρ_0 は基準状態の圧力と密度である．また D/Dt はラグランジュ微分演算子である．γ は圧縮性の度合いを表すパラメータで，本研究では $\gamma = 7$ とする．物理量の上付き添字 α，β に対しては総和規約を適用する．応力テンソルの成分 $\sigma^{\alpha\beta}$ は，

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + \mu\left(\frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{2}{3}\frac{\partial v^\gamma}{\partial x^\gamma}\delta^{\alpha\beta}\right) \tag{4}$$

で表される．ここで $\delta^{\alpha\beta}$ はクロネッカのデルタである．μ は流体の粘性係数を表す．

2.2 固体の支配方程式

固体は 2 次元線形弾性体とする．固体の運動と変形に対する支配方程式は，連続の方程式 (1) と運動方程式 (2) そして，フックの法則を表す状態方程式

$$p = K\eta = K\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) \tag{5}$$

である．ここで，K は体積弾性率，η は体積ひずみである．固体の応力テンソルの成分 $\sigma^{\alpha\beta}$ は，圧力 p と偏差応力テンソルの成分 $s^{\alpha\beta}$ を用いて次のように表される．

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + s^{\alpha\beta} \tag{6}$$

変形時の物体の回転を考慮した Jaumann stress rate[2] を用いると，偏差応力の時間変化率 $Ds^{\alpha\beta}/Dt$ が

$$\frac{Ds^{\alpha\beta}}{Dt} = 2G\left(\dot{\varepsilon}^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\dot{\varepsilon}^{\gamma\gamma}\right) + s^{\alpha\gamma}\omega^{\beta\gamma} + s^{\gamma\beta}\omega^{\alpha\gamma} \tag{7}$$

で与えられる．ここで，G は横弾性係数である．$\dot{\varepsilon}^{\alpha\beta}$ はひずみテンソルの成分の時間変化率，$\omega^{\alpha\beta}$ は回転テンソルの成分であり，それぞれ

$$\dot{\varepsilon}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha}\right), \quad \omega^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha}\right) \tag{8}$$

で定義される．

3. SPH 法による離散化

3.1 SPH 法の概要

SPH 法は連続体を粒子の集合とみなし，この粒子上で任意の時間における物理量を計算する方法である．方法の概要を以下にまとめる．

空間内の任意の位置 $\mathbf{r}$ での物理量 $\phi(\mathbf{r})$ は積分表現

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \phi(\mathbf{r}')\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right)d\mathbf{r}' \tag{9}$$

で与えられる．ここで $\delta(\mathbf{r})$ はディラックのデルタ関数である．ディラックのデルタ関数のような不連続関数は数値計算には適さないため，SPH 法ではデルタ関数の代わりに内挿カーネルと呼ぶ連続関数 W を用いる．本研究では，次のカーネル関数を用いる．

$$W\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',h\right)=\frac{1}{h^2}f\left(\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{h}\right) \tag{10}$$

ここに，h はカーネルの広がりを表すパラメータである．関数 f は

$$f(s)=\begin{cases}\dfrac{10}{7\pi}\left(1-\dfrac{3}{2}s^2+\dfrac{3}{4}s^3\right) & 0\le s<1\\ \dfrac{5}{14\pi}(2-s)^3 & 1\le s<2\\ 0 & s\ge 2\end{cases} \tag{11}$$

のような 3 次のスプライン関数 [3] で与える．ディラックのデルタ関数を内挿カーネル W で置き換えると，$\phi(\mathbf{r})$ に対する近似 $\langle\phi(\mathbf{r})\rangle$ が

$$\langle\phi(\mathbf{r})\rangle=\int\phi(\mathbf{r}')W\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',h\right)d\mathbf{r}' \tag{12}$$

のように与えられる．連続体を N 個の粒子の集合体と考えると，式 (12) は

$$\langle\phi(\mathbf{r})\rangle=\sum_{j=1}^{N}\phi_j\frac{m_j}{\rho_j}W\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j,h\right) \tag{13}$$

のように離散化される．ここに，m_j，ρ_j，$\mathbf{r}_j$ はそれぞれ j 番目の粒子の質量，密度，位置ベクトルを表し，$\phi_j=\langle\phi(\mathbf{r}_j)\rangle$ である．前節で示した支配方程式を離散化するために，物理量の微分形が必要となる．物理量 ϕ の勾配 $\partial\phi/\partial x^\alpha$ は，カーネルの勾配を計算することで得られる．すなわち，式 (13) より

$$\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}(\mathbf{r})\right\rangle=\sum_{j=1}^{N}\phi_j\frac{m_j}{\rho_j}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}[W\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j,h\right)] \tag{14}$$

となる．さらに，式 (13)，(14) において $\mathbf{r}=\mathbf{r}_i$ として両式を粒子 i の位置に適用すると，

$$\phi_i=\langle\phi(\mathbf{r_i})\rangle=\sum_{j=1}^{N}\phi_j\frac{m_j}{\rho_j}W_{ij} \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}\right)_i=\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}(\mathbf{r_i})\right\rangle=\sum_{j=1}^{N}\phi_j\frac{m_j}{\rho_j}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \tag{16}$$

となる．ここに，$W_{ij}=W\left(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j,h\right)$ である．式 (15) と (16) の総和計算は全粒子について行うのではなく，粒子 i を中心とする半径 R の円 (これを影響円と呼ぶ) の内部に含まれる粒子のみを対象とする．本研究では $R=2h$ とする．

3.2 離散化

連続の方程式 (1) を離散化した式は

$$\frac{D\rho_i}{Dt}=\rho_i\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}v_{ij}^\alpha\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \tag{17}$$

となる．ここに， $v_{ij}^\alpha=v_i^\alpha-v_j^\alpha$ である．この式に，圧力の数値振動を抑える効果があるとされる人工拡散項 [4] を加えて，式 (17) を

$$\frac{D\rho_i}{Dt}=\rho_i\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}v_{ij}^\alpha\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha}+\delta hc_0\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}\psi_{ij}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \tag{18}$$

$$\psi_{ij}^\alpha=2(\rho_i-\rho_j)\frac{x_{ij}^\alpha}{x_{ij}^\alpha x_{ij}^\alpha+\lambda\overline{h}_{ij}^2}-\left[\langle\triangledown\rho\rangle_i^\alpha-\langle\triangledown\rho\rangle_j^\alpha\right] \tag{19}$$

で置き換える．ここで，c_0 は音速，δ は人工拡散項の大きさを調整するパラメータであり，本研究では $\delta=0.1$ としている．$x_{ij}^\alpha=x_i^\alpha-x_j^\alpha$ である．$\langle\triangledown\rho\rangle^\alpha$ は再正規化した密度勾配で次のように定義される．

$$\langle\triangledown\rho\rangle_i^\alpha=\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}(\rho_j-\rho_i)L_i^{\alpha\beta}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \tag{20}$$

ここに，$L_i^{\alpha\beta}$ は次式の行列 $\mathbf{L}_i$ の α 行 β 列の成分である．

$$\mathbf{L}_i=\left[\sum_{j=1}^{N}(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i)\otimes\triangledown_i W(x_j^\alpha)dV_j\right]^{-1} \tag{21}$$

運動方程式 (2) を離散化した式は

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt}=\sum_{j=1}^{N}m_j\left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}+\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_i\rho_j}-\delta^{\alpha\beta}\Pi_{ij}\right)\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}+f_i^\alpha \tag{22}$$

となる．ここで Π_{ij} は人工粘性を表し，圧力の数値振動と粒子同士のすり抜けを防ぐ効果を持ち，次式で表される．

$$\Pi_{ij}=\begin{cases}\dfrac{A\overline{c}_{ij}\theta_{ij}+B\theta_{ij}^2}{\overline{\rho}_{ij}} & v_{ij}^\alpha x_{ij}^\alpha<0\\ 0 & v_{ij}^\alpha x_{ij}^\alpha\ge 0\end{cases} \tag{23}$$

$$\theta_{ij}=\frac{h_{ij}v_{ij}^\alpha x_{ij}^\alpha}{x_{ij}^\beta x_{ij}^\beta+\lambda\overline{h}_{ij}^2} \tag{24}$$

ここで $\overline{c}_{ij}$ ，$\overline{h}_{ij}$ はそれぞれ粒子 i と粒子 j の音速とカーネルの大きさの平均を表す．A，B は人工粘性の大きさを調整するパラメータであり，本研究では $A=B=1.0$ としている．

固体の運動方程式には，張力の不安定性を取り除く人工応力項 [2] $R_{ij}^{\alpha\beta}F_{ij}^n$ を付加し，式 (22) を

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt}=\sum_{j=1}^{N}m_j\left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}+\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_i\rho_j}-\delta^{\alpha\beta}\Pi_{ij}+R_{ij}^{\alpha\beta}F_{ij}^n\right)\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}+f_i^\alpha \tag{25}$$

とする．ここで F_{ij}^{n} は

$$F_{ij}^n=\left(\frac{W(r_{ij})}{W(d_0)}\right)^n \tag{26}$$

と定義される．$r_{ij}=r_i-r_j$ であり，d_0 は粒子間距離の初期値を表す．n は，人工応力の大きさを調整するパラメータであり，本研究では $n=4$ とする．$R_{ij}^{\alpha\beta}$ は粒子の主応力で計算されるパラメータである．

4. 計算技法

4.1 壁粒子の導入

本研究では，水槽の壁や底など変形を考慮しない剛体を表現するとき壁粒子を用いている [5]．壁近傍の流体粒子，弾性体粒子に関する総和計算において，粒子の影響円内に含まれる壁粒子が不足することによる精度低下を防ぐために，壁の厚み方向に壁粒子を複数の層にして配置する．

壁に接する流体粒子に対しては，境界条件としてすべり条件を課し，流体粒子から壁粒子へ圧力の補間計算を行う．壁粒子の速度成分と圧力はそれぞれ次式で計算される．

$$v_{w-f}^{\alpha}=\zeta\frac{\sum_{i=1}^{N}v_i^{\alpha}W_{wi}}{\sum_{i=1}^{N}W_{wi}} \tag{27}$$

$$p_{w-f}=\frac{\sum_{i=1}^{N}p_iW_{wi}+g^{\alpha}\cdot\sum_{i=1}^{N}\rho_i x_{wi}^{\alpha}W_{wi}}{\sum_{i=1}^{N}W_{wi}} \tag{28}$$

ここに下付き添字 $w-f$ は注目する壁粒子が流体粒子に対して持つ量であることを意味し，下付き添字 i は，その壁粒子を中心とする影響円内に含まれる流体粒子に関する量であることを意味する．ζ は，v_i^{α} が壁に対して垂直方向のときは -1，水平方向のときは $+1$ の値とする．N は影響円内の粒子の数を表す．また，g^{α} は重力加速度の x^{α} 成分，$W_{wi}=W(r_w-r_i,h)$，$x_{wi}^{\alpha}=x_w^{\alpha}-x_i^{\alpha}$ である．また，壁粒子の密度 ρ_{w-f} は，p_{w-f} を流体の状態方程式に代入し ρ について解いて導出する．

壁に接する固体粒子については，壁粒子の速度は更新を行わず常に $v_{w-s}^1=v_{w-s}^2=0$ で一定とする．ここに下付き添字 $w-s$ は注目する壁粒子が固体粒子に対して持つ量であることを意味する．壁粒子の弾性体粒子に対する圧力 p_{w-s} については，式 (28) の右辺と同様の式を用いて弾性体粒子から壁粒子へ圧力の補間計算を行う．このとき式 (28) の下付き添字 i は，その壁粒子を中心とする影響円内に含まれる固体粒子に関する量であることを意味する．また，壁粒子の密度 ρ_{w-s} は，p_{w-s} を固体の状態方程式 (5) に代入し ρ について解いて導出する．

4.2 時間積分法

連続の方程式 (1)，運動方程式 (2)，偏差応力 $s_i^{\alpha\beta}$ の発展方程式 (7)，そして粒子の位置を更新するための式 $Dx_i^{\alpha}/Dt=v_i^{\alpha}$ を時間積分する方法は次のとおりである．

速度成分 v_i^{α}，応力テンソルの成分 $\sigma_i^{\alpha\beta}$，密度 ρ_i，粒子座標 x_i^{α} を記号 ϕ で代表させて，これらの式を，

$$\frac{D\phi}{Dt}=F(\phi) \tag{29}$$

のように表す．時間増分を Δt として，時刻 $t^n=n\Delta t$ の値 ϕ^n を知って時刻 $t^{n+1}=(n+1)\Delta t$ の値 ϕ^{n+1} を求めるために，次の 2 段階の計算を行う．

$$\phi^{n+\frac{1}{2}}=\phi^n+\frac{\Delta t}{2}F(\phi^n) \tag{30}$$

$$\phi^{n+1}=\phi^n+\Delta tF(\phi^{n+\frac{1}{2}}) \tag{31}$$

5. 計算結果

5.1 静水圧の計算

最初に，自由表面を有する動きの少ない問題として静水中の圧力分布の計算を行う．Fig. 1 に示されるように上部が開放された水槽に水を入れたモデルを想定する．水の物性値は密度 $\rho=1000\,\mathrm{kg/m^3}$，粘性係数 $\mu=1.307\times\ 10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$，重力加速度 $g=9.81\,\mathrm{m/s^2}$ とする．流体の粒子数は 16670 個，壁を構成する剛体粒子数は 4330 個，時間刻みを $\Delta t=10^{-4}\,\mathrm{s}$ とする．この場合，壁は剛体とし，剛体粒子で表現する．初期条件として，すべての流体粒子に

$$v^1=v^2=p=0 \tag{32}$$

を課す．このとき，$v^1=v^2=0$ が保たれ，

$$p=\rho g x^2 \tag{33}$$

で表される厳密解を満たす圧力が与えられていれば正解である．初期状態と 15 秒後の圧力分布を Fig. 2 に示す．

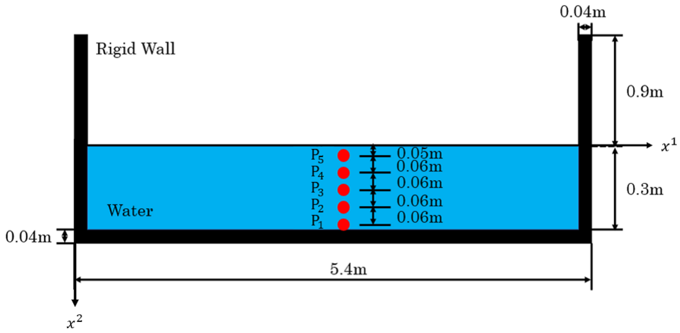
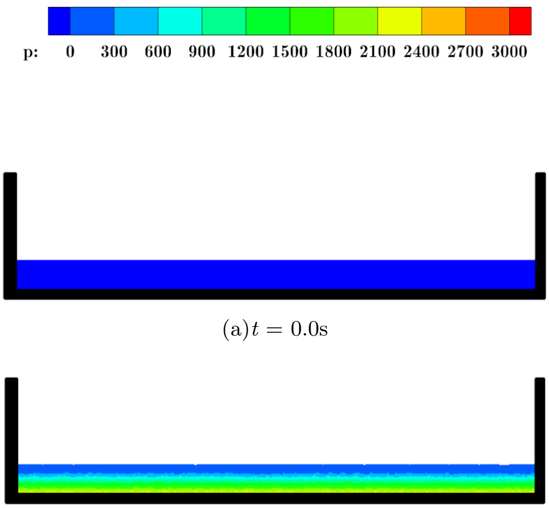


Fig.1　Hydrostatic pressure calculation model

これを見ると水深が深くなるにつれて圧力も大きくなっている様子がわかる．次に，評価点 P_1 から P_5 における圧力値を厳密解と比較した図を Fig. 3 に示す．計算直後は圧力振動が生じるが，時間が進むにつれ振動は減衰し，評価点 P_1 では収束値 3000.42 Pa になる．これは，理論値 2893.95 Pa と比べても良好な結果であると考えられる．また，それぞれの評価点において計算値が厳密解と近い値を得ることができた．



(a)$t=0.0$s

(b)$t=15$s

Fig.2　Hydrostatic pressure distribution

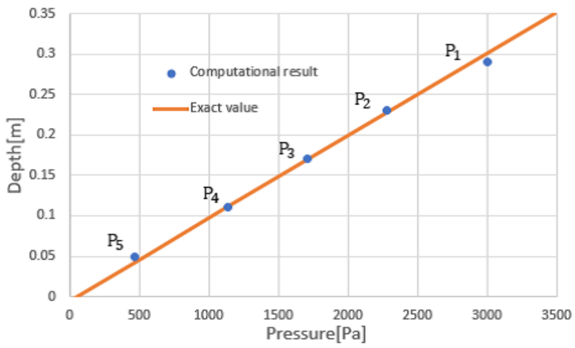


Fig.3 Relationship between water depth and pressure

5.2 液柱崩壊によって生じる流れによる漂流弾性体と弾性平板の衝突

本手法で，漂流弾性体と弾性平板の衝突の解析が可能であるかを簡易的なモデルを用いて検証する．Fig.4 に計算モデルを示す．剛体容器の左壁沿いに液柱を設置し，容器の床に 8mm だけ水を張っておく．左壁から 0.398m の位置の底に弾性平板を設置する．弾性平板の下部は固定されており，上部は自由端となっている．また，左壁から 0.234m の位置に漂流物に見立てた弾性体を水面に接するように設置する．平板と漂流物の物性値に密度 ρ = 1100 kg/m^3 ，体積弾性率 K=20 MPa，せん断係数 G=4.27 MPa を用いる．また流体は水とし，密度 ρ = 1000 kg/m^3，粘性係数 μ=1.307 × 10^{-3}Pa·s とする．計算モデルの各数値パラメータは L=0.146 m，s=0.012 m，a=0.398 m，b=0.146 m， c=0.174 m， d=0.036 m， h=0.080 m である．流体の粒子数は 11300 個，漂流物を構成する粒子数は 324 個，弾性平板を構成する粒子数は 240 個，時間刻みを Δt=10^{-5}s とする．容器は剛体とする．壁境界の条件としてはすべりあり条件を用いる．

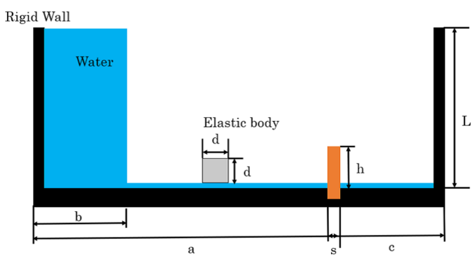
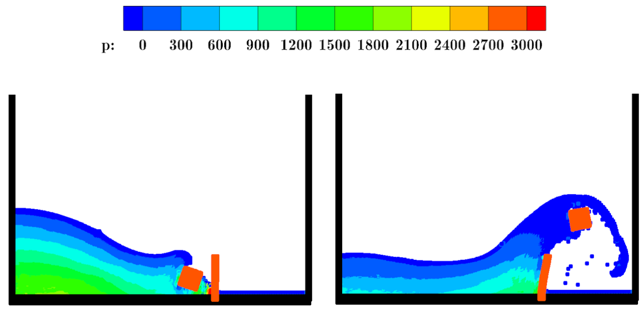


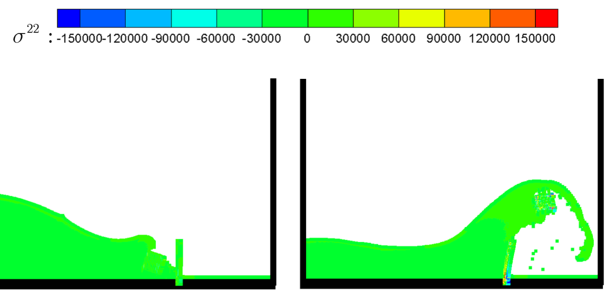
Fig.4 Collision between the drifting elastic body and the elastic flat plate due to the collapse of the liquid column

Fig.5 に流体の圧力分布を時刻ごとに示す．t=0.2s 付近で弾性体は弾性平板に衝突し，衝突した流体は押し寄せてくる弾性体と直立する弾性平板に挟まれる形で高い圧力値を示した．その後 t=0.3s 以降にかけて弾性体は弾性平板の上を越流し，さらに続く流体によって押し流されることで右壁に衝突した．越流する際には周辺に粒子の少ない水しぶきの再現も確認することができ，安定して計算することができている．次に，Fig.6 に弾性平板と漂流する弾性体内部の応力 σ^{22} の分布を示す．弾性平板が変形するに従い，弾性平板左側では引張応力が，弾性平板右側では圧縮応力が発生していることがわかる．



t=0.2s t=0.4s

Fig.5 Deformation and pressure change of elastic plate



t=0.2s t=0.4s

Fig.6 Deformation and stress change of elastic plate

6. おわりに

SPH 法を用いて流体－構造連成問題の数値解析手法を構築した．初めに，自由表面を有する動きの少ない問題として静水中の圧力分布の計算を行い，厳密解に近い静水圧を得ることができた．次に流体－構造連成問題として，崩壊する液柱によって流体と漂流弾性体が弾性平板に衝突する計算を行った．流体および弾性体の衝突によって弾性平板が変形する様子を確認するとともに，弾性平板内部の応力分布を確認した．

参考文献

(1) Monaghan J.J., Smoothed particle hydrodynamics, Annual Review of Astrophysics, **30** (1992) pp.543-574.

(2) Gray J.P., Monaghan J.J.,and Swift R.P., SPH elastic dynamics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **190** (2001) pp.6641-6662.

(3) Monaghan J.J., Simulating Free surface flows with SPH, Journal of Computational Physics, **110** (1994) pp.6641-6662.

(4) S.Marrone., M.Antuono., A.Colagross., δ-SPH model for simulating violent impact flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **200** (2011) pp.1526-1542.

(5) S.Adami., X.Y.Hu., N.A.Adams., A generalized wall boundary condition for smoothed particle hydrodynamics, Journal of Computational Physics, **231** (2012) pp.7057-7075.