連続モデルにおけるケリー基準
The Kelly Criteria in a Continuous Time Model

経営システム工学専攻 池澤和輝

はじめに

今日、資産運用やリスクマネジメントの意思決定の方法として、金融工学が用いられるようになっている。金融工学の基本は数学的理論がバックグラウンドとなり、それを実際に利用できる形に変形させ用いられている。本研究では、資金の増加割合を最大限にするために最適な資金を投入するための投資理論として知られるケリー基準を様々な効用関数で、期待効用を最大にするように最適解を求め、その際の破産確率をリスク、リターンの変化による動きを見て効用関数の性質を論じる。

1 ケリーの公式とは

ギャンブルの投資戦略について考えたとき、勝率や掛け金へのリターンはその各ゲームによって様々である。ケリーの公式とは、有利なゲームにおいて、そのゲームにおける掛け金の最適値を求めるための係数、$f^*\times$ 資金=掛け金の最適値となるような $f^*(0 < f^* < 1)$ を求める式のことである。ケリーの公式では、ゲームの参加条件として、有利である賭けであることが参加の条件となっている。不利な賭けを繰り返せば、当然負けに向かっていく、しかし有利な賭けであっても負けに向かう可能性もある。これらの中で確実に資金を増やしていくためには不利な賭けには参加しない事は当然として考える。

2 ケリーパラメータと破産確率

2.1 確率微分方程式

賭ける株価の確率過程 S_t が $S_0 = 1$(初期価格=1) で確率微分方程式 $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ に従っているとする。賭ける株価を S_t としそれに c ずつかけていく時の資産の過程を X_t^c と置くと

$$X_t^c = e^{(c\mu - \frac{1}{2}c^2\sigma^2)t + c\sigma W_t}$$

となり確率微分方程式

$$dX_t^c = c\mu X_t^c dt + c\sigma X_t^c dW_t$$

に従う。

2.2 log 効用

効用関数 $U(x) = \log x$ で期待効用を最適にする。

$$\begin{aligned} E(U(X_t^c)) &= E(\log X_t^c) \\ &= E((c\mu - \frac{1}{2}c^2\sigma^2)t + c\sigma W_t) \\ &= (c\mu - \frac{1}{2}c^2\sigma^2)t \end{aligned}$$

となり、最適値 c^t は $c^t = \frac{\mu}{\sigma^2}$ でその時の期待効用は $\frac{\mu^2}{2\sigma^2}t$ である。

2.3 破産確率

$0 < a < 1 < b$ で 1 から出発して b に到達する前に a に到達すれば破産、a に到達する前に b に到達すれば目標金額到達とする。$dX_t^c = c\mu X_t dt + c\sigma X_t^c dW_t, X_0^c = 1$ の破産確率を求めると

$$P(T_a \le T_b) = \frac{1 - b^{1-\frac{2\mu}{c\sigma^2}}}{a^{1-\frac{2\mu}{c\sigma^2}} - b^{1-\frac{2\mu}{c\sigma^2}}}$$

となる。$T_a = \inf\{t \mid X_t^c = a\}$,$T_b = \inf\{t \mid X_t^c = b\}$

3 実験に用いる効用関数

3.1 相対リスク回避度

相対的リスク回避度とは限界効用の富に対する弾力性と解釈でき、富の変動率をリスクの大きさと捉え、投資家がどれだけリスクをとることを避けたいと考えているかを示した数値であり、

$$R(X) = -\frac{XU''(X)}{U'(X)}$$

で表されリスク回避的な効用関数では $R(X) > 0$ である。

3.2 2 次効用

2 次効用の効用関数は

$$U(x) = x - m_1 x^2\ ,\ (m_1 > 0)$$

でリスク回避度は

$$R(x) = \frac{2m_1 x}{1 - 2m_1 x}$$

となる。

3.3　2 次効用の期待効用

期待効用は、

$$E(U(X_t^c)) = E(X_t^c - m_1 X_t^{c2})$$

$$= E(e^{(c\mu-1/2c^2\sigma^2)t+c\sigma W_t} - m_1 e^{2(c\mu-1/2c^2\sigma^2)t+2c\sigma W_t})$$
$$= e^{(c\mu-\frac{1}{2}c^2\sigma^2)t}E(e^{c\sigma N(0,t)}) - m_1 e^{2(c\mu-\frac{1}{2}c^2\sigma^2)t}E(e^{2c\sigma N(0,t)})$$
$$= e^{(c\mu-\frac{1}{2}c^2\sigma^2)t+\frac{1}{2}c^2\sigma^2 t} - m_1 e^{2(c\mu-\frac{1}{2}c^2\sigma^2)t+2c^2\sigma^2 t}$$

となる。

3.4　指数効用

指数効用の効用関数は

$$U(x) = (1-e^{-m_2 x})\frac{1}{m_2}\ ,\ (m_2 > 0)$$

でリスク回避度は

$$R(x) = m_2 x$$

となる。

3.5　指数効用の期待効用

効用関数は期待効用は

$$E(U(X_t^c)) = E((1-e^{-m_2 X_t^c})\frac{1}{m_2})$$
$$= E((1-e^{-m_2 e^{(c\mu-1/2c^2\sigma^2)t+c\sigma W_t}})\frac{1}{m_2})$$

となり期待効用を解析的に求めることが困難なので今回はモンテカルロシミュレーションによって最適値を得ることにする。

3.6　angles

効用関数は

$$U(x) = -\max(m_3 - x\ ,\ 0)\ ,\ (m_3 \in \mathbb{R})$$

でリスク回避度は

$$R(x) = 0$$

となる。

3.7　angles の期待効用

期待効用はヨーロピアン・プット・オプション価格のブラックショールズ式より、

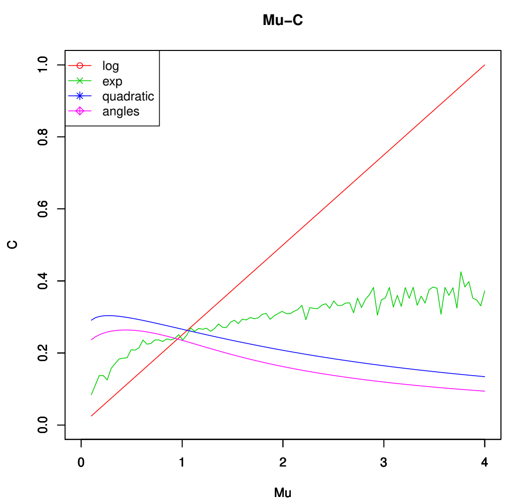
$$E(U(X_t^c)) = E(-\max(m_3 - X_t^c\ ,\ 0))$$
$$= E(-\max(m_3 - e^{(c\mu-\frac{1}{2}c^2\sigma^2)t+c\sigma W_t})\ ,\ 0)$$
$$= -e^{c\mu t}\Phi(-\frac{\log\frac{1}{m_3} + (c\mu + \frac{1}{2}c^2\sigma^2)t}{c\sigma\sqrt{t}})$$
$$+m_3\Phi(-\frac{\log\frac{1}{m_3} + (c\mu - \frac{1}{2}c^2\sigma^2)t}{c\sigma\sqrt{t}})$$

となる。

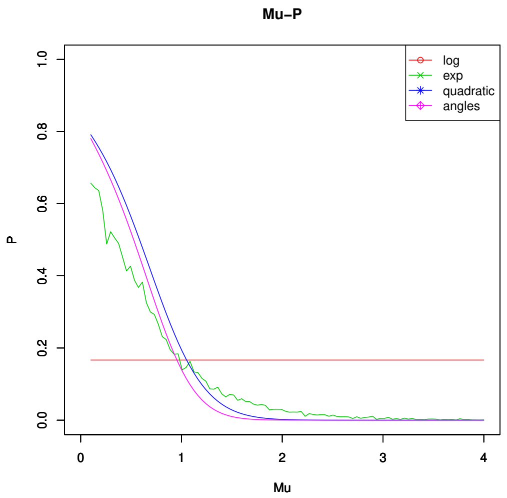
4　数値実験

a	$\frac{1}{b}$
b	5
σ	2
t	10
m_1	0.001
m_2	0.2
m_3	100

求めた期待効用の解析解から数値実験を行う。パラメータを表のように設定し、log 効用は求めた最適値を使い、指数効用はモンテカルロシミュレーションにより 100000 個の乱数から期待効用を求め、2 次効用、angles の効用と共に R の optimize 関数を用いてケリーパラメータの最適値、また破産確率を μ の値でどう変化するか見ていく。



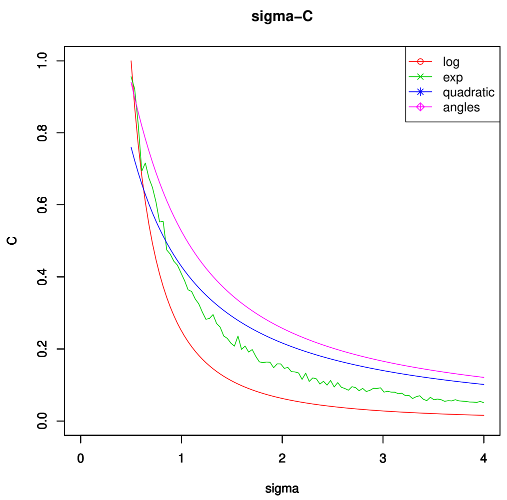
結果より、μ が小さいときは log 効用が最も賭けが小さいが μ が大きくなると比例的に大きく賭けることがわかる。これは log 効用の相対的リスク回避度が 1 で一定となることからリターンが大きくなれば賭けも大きくなると考えられる。2 次効用はリターンが大きくなると小さく賭けているがこれは効用がある一定の資産から減少する効用関数であるからだと考えられる。また angles の効用は 2 次効用と近い形をとっていることから、似た効用であることがわかる。



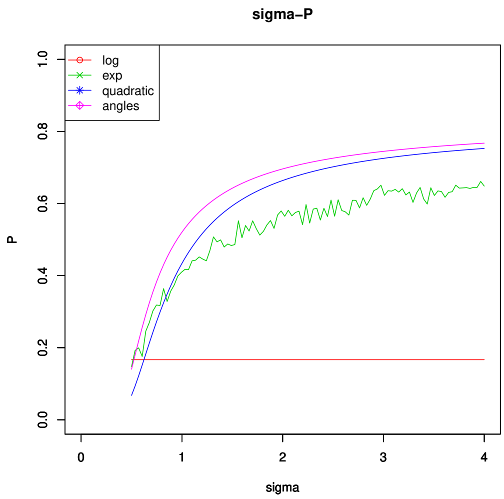
log 効用は一定の破産確率となっており、これは log 効用はリスク回避度が 1 で一定なのでリターンが大きくなても破産確率が一定だと考えられる。またそのほかの効用はリターンがある程度大きくなれば破産確率は 0 に近づいていくことがわかる。

a	$\frac{1}{b}$
b	5
μ	0.25
t	10
m_1	0.001
m_2	0.2
m_3	100

次にパラメータを上のように設定し、μ を固定し σ の値によって最適なケリーパラメータ、破産確率の変化を見ていく。



σ が大きくなるにつれてリスクが高くなるので全体的に小さく賭けるようになっていっている。またこの中では比較的 log 効用が最もリスクが大きくなると小さく賭け、angles 効用が最もリスクが高くなっても大きく賭ける傾向にある。



結果より、log 効用は σ が増えても一定の値をとっており、リスクが高い賭けでも低い破産確率をとることがわかるがその他の効用は σ が増えることで値も大きくなってしまいリスクの高い賭けに向いていないことがわかる。

5　今後の課題

今回の研究でリスクとリターンの変化によってケリー基準と破産確率の動きの変化から効用関数の性質を見ることができた。今後の課題として今回は $0 < c < 1$ で考えたので空売りを想定していない、また最適値を求める際に R の関数を使ったので解析的に求める必要がある。