

# 確率変数を用いたゼータ関数の考察

## Consideration of the Zeta Function with Random Variables

経営システム工学専攻 丸山 敦士

### 序論

リーマンゼータ関数は、ミレニアム懸賞問題の一つである「リーマン予想」に見られるように数学において非常に重要かつ有名な関数である。その定義を以下に記す。

#### 定義 (リーマンゼータ関数)

$s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 1$  とし,  $\zeta(s)$  を

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

で定義する。 $\zeta(s)$  をリーマンゼータ関数とよぶ。

リーマンゼータ関数における有名な事実として,  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$  といった**正の偶数**における特殊値がある。これらの特殊値に関しては様々な求め方が知られているが, ここでは, 確率変数を用いた方法 (確率論的手法), Dirichlet  $L$  関数を用いた方法 (代数的手法), 多重ゼータ値を用いた証明の三つを紹介する。

## 1 確率論的手法

ここで, 主定理を述べる。

#### 主定理 (Euler)

$n \in \mathbb{N}$  に対して,

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} B_{2n}}{2} (2\pi)^{2n}$$

が成り立つ。ここで,  $B_{2n}$  は以下の式で定義されるベルヌーイ数である:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} x^m = \frac{x}{e^x - 1} \quad (|x| < 2\pi).$$

確率論的手法では二つの独立同分布に従う確率変数の積や差の確率密度関数を求める必要が生じることがよくある。それについての補題を二つ述べる。

#### 補題 1.1

$S, T$  を独立な確率変数とし, 確率密度関数がそれぞれ  $f_S(x), f_T(x)$  であるとする。さらに,  $P(S > 0) = P(T > 0) = 1$  とする。このとき, 確率変数  $T/S$  の確率密度関数は

$$f_{\frac{T}{S}}(x) = \int_0^{\infty} f_S(u) f_T(ux) u du.$$

#### 補題 1.2

$S, T$  を独立な確率変数とし, 確率密度関数がそれぞれ  $f_S(x), f_T(x)$  であるとする。このとき, 確率変数  $S-T$  の確率密度関数は

$$f_{S-T}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(u+x) f_T(u) du.$$

また,  $\frac{x}{\sin x}$  のベルヌーイ数による展開式も用いる。

#### 補題 1.3

次の等式が成り立つ:

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2-2^{2n}) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \quad (|x| < \pi).$$

以下, 本節では odd で正の奇数を表すとする。

### 1.1 指数分布を用いる方法

1.1 節は [1] から引用した。

確率変数  $X_1, X_2$  をパラメータ 1 の指数分布に従う独立な確率変数とする。つまり, 確率密度関数は

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = e^{-x} \quad (x > 0).$$

ガンマ関数の相補公式を用いることにより, 以下を得る。

#### 命題 1.4

$|\alpha| < 1$  とすると,

$$E \left[ \left( \frac{X_2}{X_1} \right)^{\alpha} \right] = \frac{\pi \alpha}{\sin \pi \alpha}.$$

また, 補題 1.1 より

$$f_{\frac{X_2}{X_1}}(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (x > 0).$$

#### 命題 1.5

$n \in \mathbb{N}$  とすると,

$$E[(\log X_2 - \log X_1)^{2n}] = 2(2n)! \left( 1 - \frac{1}{2^{2n-1}} \right) \zeta(2n).$$

$|\alpha| < 1$  に対して,

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^\alpha\right] &= E\left[e^{\alpha(\log X_2 - \log X_1)}\right] \\
&= E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(\log X_2 - \log X_1))^n}{n!}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} E\left[(\log X_2 - \log X_1)^{2n}\right] \\
&\quad (\because E\left[(\log X_2 - \log X_1)^{\text{odd}}\right] = 0) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} E\left[(\log X_2 - \log X_1)^{2n}\right].
\end{aligned}$$

ここで、補題 1.3 に  $x = \pi\alpha$  を代入した式

$$\frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2 - 2^{2n}) B_{2n} \pi^{2n} \alpha^{2n}}{(2n)!} \quad (|\alpha| < 1).$$

を用いると、命題 1.5 より  $n \in \mathbb{N}$  として

$$2(2n)! \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right) \zeta(2n) = (-1)^n (2 - 2^{2n}) B_{2n} \pi^{2n}.$$

この等式を変形すれば、主定理 1 が得られる。

## 1.2 ロジスティック分布を用いる方法

1.2 節は [2],[3] を参考にした。

$X_3$  を標準ロジスティック分布に従う確率変数とする。つまり、確率密度関数は

$$f_{X_3}(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \quad (-\infty < x < \infty).$$

### 命題 1.6

$|t| < 1$  とすると、

$$E[e^{tX_3}] = \frac{\pi t}{\sin \pi t}.$$

### 命題 1.7

$n \in \mathbb{N}$  とすると、以下が成り立つ：

$$E\left[(\log e^{tX_3})^{2n}\right] = 2(2n)! \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right) \zeta(2n) t^{2n}.$$

命題 1.7 の証明では、以下の等式を用いている：

$$E[X_3^{2n}] = 2(2n)! \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right) \zeta(2n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

また、 $|t| < 1$  に対して

$$\begin{aligned}
E[e^{tX_3}] &= E\left[e^{\log e^{tX_3}}\right] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log e^{tX_3})^n}{n!}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} E\left[(\log e^{tX_3})^{2n}\right] \quad (\because E[X_3^{\text{odd}}] = 0) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} E\left[(\log e^{tX_3})^{2n}\right].
\end{aligned}$$

ここで、補題 1.3 に  $x = \pi t$  を代入した式

$$\frac{\pi t}{\sin \pi t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2 - 2^{2n}) B_{2n} \pi^{2n} t^{2n}}{(2n)!} \quad (|t| < 1).$$

を用いると、命題 1.7 より  $|t| < 1$  に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} 2(2n)! \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right) \zeta(2n) t^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2 - 2^{2n}) B_{2n} \pi^{2n} t^{2n}}{(2n)!}$$

が成り立つ。よって、 $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$2(2n)! \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right) \zeta(2n) = (-1)^n (2 - 2^{2n}) B_{2n} \pi^{2n}.$$

この等式を変形すれば、主定理 1 が得られる。

## 1.3 ガンベル分布を用いる方法

確率変数  $X_4, X_5$  をパラメータ 0,1 のガンベル分布に従う独立な確率変数とする。つまり、確率密度関数は

$$f_{X_4}(x) = f_{X_5}(x) = e^{-x+e^{-x}} \quad (-\infty < x < \infty).$$

### 命題 1.8

$|t| < 1$  に対して

$$E\left[\frac{e^{tX_4}}{e^{tX_5}}\right] = \frac{\pi t}{\sin \pi t}.$$

また、補題 1.3 に  $x = \pi t$  を代入した式

$$\frac{\pi t}{\sin \pi t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2 - 2^{2n}) B_{2n} \pi^{2n} t^{2n}}{(2n)!} \quad (|t| < 1)$$

を用いると、 $|t| < 1$  に対して

$$E\left[\frac{e^{tX_4}}{e^{tX_5}}\right] = \frac{\pi t}{\sin \pi t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2 - 2^{2n}) B_{2n} \pi^{2n} t^{2n}}{(2n)!}.$$

ここで、補題 1.2 より

$$f_{X_4 - X_5}(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \quad (-\infty < x < \infty).$$

### 命題 1.9

次が成り立つ：

$$E\left[\frac{e^{tX_4}}{e^{tX_5}}\right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \cdot 2(2n)! \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right) \zeta(2n).$$

命題 1.9 の証明には以下の等式を用いている：

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{e^{tX_4}}{e^{tX_5}}\right] &= E\left[e^{t(X_4 - X_5)}\right] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t(X_4 - X_5))^n}{n!}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} E\left[(X_4 - X_5)^{2n}\right] \quad (\because E[(X_4 - X_5)^{\text{odd}}] = 0) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} E\left[(X_4 - X_5)^{2n}\right].
\end{aligned}$$

以上のことから、 $|t| < 1$  として、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2 - 2^{2n}) B_{2n} \pi^{2n} t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \cdot 2(2n)! \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right) \zeta(2n)$$

となる。よって、 $n \in \mathbb{N}$  として

$$2(2n)! \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right) \zeta(2n) = (-1)^n (2 - 2^{2n}) B_{2n} \pi^{2n}.$$

この等式を変形すれば、主定理 1 が得られる。

## 1.4 どのような確率変数を用いればよいか

最後に、主定理1を証明するためにはどのような確率変数を用いればよいかということについて、私自身の考察を述べる。

### 二つの独立同分布に従う確率変数 $X, Y$ を用いる場合

- (1) 確率密度関数ができるべくシンプルになるようなパラメータを用いる。
- (2)  $E\left[\left(\frac{Y}{X}\right)^\alpha\right]$  や  $E\left[\frac{e^{tY}}{e^{tX}}\right]$  などが三角関数で表示できるものを選ぶ。

(1) 確率論的手法では、積分計算をすることが多い。そのため、一般の文字パラメータを考えると計算が複雑になったり場合によっては積分計算ができなくなってしまう可能性もある。そのため、確率変数が複雑にならないようなパラメータを取るほうがよいと思われる。

(2)  $\frac{x}{\sin x}$  の展開が、ベルヌーイ数を用いて表示できることからきている。なお、 $\alpha$  や  $t$  には制限(範囲)があることが多い。

### 一つの確率変数 $X$ を用いる場合

- (1) 確率密度関数ができるべくシンプルになるようなパラメータを用いる。
- (2)  $E[X^\alpha]$  や  $E[e^{tX}]$  などが三角関数で表示できるものを選ぶ。
- (3) 確率密度関数が偶関数 ( $y$  軸対称) なものを選ぶ。これからの課題を述べると以下のようなになる。

(1),(2) これについては前述の通りである。

(3)  $\frac{x}{\sin x}$  のベルヌーイ数を用いた展開において、奇数次の項の係数が0であることからきている。定義域が  $-\infty < x < \infty$  であるような確率密度関数  $f_X(x)$  が偶関数であれば、奇数次のモーメントが0になり、係数比較をすることができる。ただし、「確率密度関数が偶関数である」という条件は制限としては強く、またパラメータもうまく取る必要があるため、使える確率分布がかなり制限されてしまうと私は考えている。

### これからの課題

- (1) 異なる分布に従う確率変数の商を用いて証明できるか考える。
- (2) 三角関数のベルヌーイ数による展開式を用いない方法がないか考察する。 など

なお、これらは修士論文で紹介した方法の一部である。

## 2 代数的手法

2節は、[9]からの引用が中心である。

代数的手法では、Dirichlet  $L$  関数を用いる。定義を以下に記す。

### 定義 (Dirichlet $L$ 関数)

$N \in \mathbb{N}$  とし、環  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  の可逆元全体の乗法群  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$  から  $\mathbb{C}$  の乗法群  $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  への群準同型

$$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

を  $(\text{mod } N)$  の Dirichlet 指標とよび、

$$L(s, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

とにおいて、これを ( $\chi$  についての) Dirichlet  $L$  関数とよぶ。ただし、 $\chi(n)$  は、 $n$  と  $N$  が互いに素なときは  $\chi(n \pmod{N})$  を表すが、 $n$  と  $N$  が互いに素でない場合は0を表すとする。

ここで、本節における主定理を述べる。

### 主定理 2

$r$  を正の偶数とすると、

$$\zeta(r) = \frac{1}{(r-1)!} \cdot \frac{1}{2^r - 1} \cdot (2\pi i)^r \cdot \frac{1}{2} \cdot h_r(-1).$$

ここで、 $h_r(t)$  ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ) は以下で定義される有理数係数の有理関数とする:

$$h_1(t) := \frac{1+t}{2(1-t)} \quad (t \neq 1)$$

$$h_r(t) := t \frac{d^{r-1} h_1(t)}{dt^{r-1}} \quad (r \geq 1, t \neq 1).$$

主定理1と主定理2の右辺を比較することにより、偶番号のベルヌーイ数の  $h_r(t)$  による表示が得られる。

### 命題 2.1

2以上の偶数  $r$  に対して、

$$B_r = -\frac{r}{2^r - 1} h_r(-1).$$

## 3 多重ゼータ値

まず、多重ゼータ値の定義を述べる。

### 定義 (多重ゼータ値)

$k_1 \in \mathbb{N}_{\geq 2}, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  に対して、 $\zeta(k_1, k_2, \dots, k_n)$  を

$$\zeta(k_1, k_2, \dots, k_n) := \sum_{m_1 > m_2 > \dots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}}$$

で定める。 $\zeta(k_1, k_2, \dots, k_n)$  を **多重ゼータ値** とよぶ。ここで、 $k := k_1 + k_2 + \dots + k_n$  を多重ゼータ値  $\zeta(k_1, k_2, \dots, k_n)$  の **重さ**、 $n$  を **深さ** という。

この定義より、深さ1の多重ゼータ値はリーマンゼータ関数の整数点での値であることがわかる。

ここで、リーマンゼータ関数の特殊値を求める際に多重ゼータ値を考える背景を説明する。リーマンゼータ関

数の特殊値を求める際によく用いられる等式として、 $\sin$  関数の積公式がある。具体的に書くと、

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) &= \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right) \cdots \\ &= 1 - \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}\right) x^2 + \left(\sum_{m_1 > m_2 > 0} \frac{1}{m_1^2 m_2^2}\right) x^4 \\ &\quad - \left(\sum_{m_1 > m_2 > m_3 > 0} \frac{1}{m_1^2 m_2^2 m_3^2}\right) x^6 + \cdots \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\zeta(2, 2, \dots, 2)}_{n \text{ 個}} x^{2n}. \end{aligned}$$

これより、 $\zeta(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n \text{ 個}})$  の値を用いることで、 $\zeta(2n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) の値を求めることができるのではないかと考えられる。以下、[8] から引用する。

$\sin x$  のマクローリン展開を考えることにより、以下が得られる。

### 命題 3.1

次が成り立つ：

$$\zeta(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n \text{ 個}}) = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}.$$

次に、リーマンゼータ関数と多重ゼータ値の積について考察する。

例えば、リーマンゼータ関数の積は

$$\begin{aligned} \zeta(p)\zeta(q) &= \left(\sum_{m>0} \frac{1}{m^p}\right) \left(\sum_{n>0} \frac{1}{n^q}\right) = \sum_{m,n>0} \frac{1}{m^p n^q} \\ &= \left(\sum_{m>n>0} \frac{1}{m^p n^q}\right) + \left(\sum_{n>m>0} \frac{1}{m^p n^q}\right) + \left(\sum_{m=n>0} \frac{1}{m^p n^q}\right) \\ &= \zeta(p, q) + \zeta(q, p) + \zeta(p+q). \end{aligned}$$

また、深さが 1 と 2 の多重ゼータ値の積は

$$\begin{aligned} \zeta(p)\zeta(q, r) &= \left(\sum_{l>0} \frac{1}{l^p}\right) \left(\sum_{m>n>0} \frac{1}{m^q n^r}\right) = \sum_{\substack{l>0 \\ m>n>0}} \frac{1}{l^p m^q n^r} \\ &= \left(\sum_{l>m>n>0} \frac{1}{l^p m^q n^r}\right) + \left(\sum_{m>l>n>0} \frac{1}{l^p m^q n^r}\right) \\ &\quad + \left(\sum_{m>n>l>0} \frac{1}{l^p m^q n^r}\right) + \left(\sum_{l=m>n>0} \frac{1}{l^p m^q n^r}\right) \\ &\quad + \left(\sum_{m>l=n>0} \frac{1}{l^p m^q n^r}\right) \\ &= \zeta(p, q, r) + \zeta(q, p, r) + \zeta(q, r, p) + \zeta(p+q, r) + \zeta(q, p+r). \end{aligned}$$

この積と命題 3.1 を用いて、 $\zeta(2)$  の値から  $\zeta(4), \zeta(6)$  の値を求める。はじめに、

$$\zeta(2)^2 = \zeta(2, 2) + \zeta(2, 2) + \zeta(2+2) = 2\zeta(2, 2) + \zeta(4)$$

より、

$$\zeta(4) = \zeta(2)^2 - 2\zeta(2, 2) = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\pi^4}{5!} = \frac{\pi^4}{90}.$$

次に、

$$\zeta(2)\zeta(2, 2) = 3\zeta(2, 2, 2) + \zeta(2, 4) + \zeta(4, 2),$$

$$\zeta(4)\zeta(2) = \zeta(2, 4) + \zeta(4, 2) + \zeta(6)$$

となるので、両辺の差をとると  $\zeta(4, 2) + \zeta(2, 4)$  が消えて

$$\begin{aligned} \zeta(6) &= \zeta(4)\zeta(2) - \zeta(2)\zeta(2, 2) + 3\zeta(2, 2, 2) \\ &= \frac{\pi^4}{90} \cdot \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{\pi^4}{120} + 3 \cdot \frac{\pi^6}{7!} = \frac{\pi^6}{945}. \end{aligned}$$

この方法をもとに、一般の  $\zeta(2n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) の値を求めることができる。

## 参考文献

- [1] T. Fujita, Special values of the Riemann zeta function via arcsine random variables, *Kyoto J. Math.* **55** (2015), 673–686.
- [2] J. Liu, Y. Huang, C. Yin, Representations of the Riemann zeta function: A probabilistic approach, *MDPI Mathematics* (2019), 7, 369; doi:10.3390/math7040369
- [3] Ghosh, M., Choi, K. P., Li, J. A commentary on the Logistic distribution, In book: *The Legacy of Alladi Ramakrishnan in the Mathematical Sciences*, Alladi, K., Klauder, R., Rao, R. (eds.), Springer Science+Business Media, (2010), 351–357.
- [4] P. Bourgade, T. Fujita, and M. Yor, Euler’s formulae for  $\zeta(2n)$  and products of Cauchy variables, *Electron. Comm. Probab.* **12** (2007), 73–80.
- [5] T. Fujita, A probabilistic approach to special values of the Riemann zeta function, *RIMS Kôkyûroku* **1590** (2008), 1–9.
- [6] W. Zudilin, An elementary proof of Apéry’s theorem, arXiv:math/0202159v1 (2002).
- [7] A. Granville, A decomposition of Riemann’s zeta function, in *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **247**, Cambridge, (1997), 95–101.
- [8] 荒川 恒男, 金子 昌信. 多重ゼータ値入門. 九州大学「マス・フォア・インダストリ」レクチャーノート, (2010).
- [9] 加藤 和也, 黒川 信重, 斎藤 毅. 数論 I. 岩波書店, (2005).
- [10] 相川 弘明. 複素関数入門. 共立出版. (2016).
- [11] 河田 敬義, 三村 征雄. 現代数学概説 II. 岩波書店, (1965).
- [12] 小山 信也. 素数とゼータ関数. 共立出版, (2015).
- [13] 藤田 岳彦. 大学生の確率・統計. 東京図書, (2010).
- [14] (参考 web サイト) Shadow Academy, ベルヌーイ数の応用—テイラー展開—. (2021 年 2 月 27 日 閲覧) <https://shadowacademy.web.fc2.com/bernoullitaylor.html>
- [15] (参考 web サイト) Wikipedia, ベルヌーイ数. (2021 年 2 月 27 日 閲覧) <https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%99%E3%83%AB%E3%83%8C%E3%83%BC%E3%82%A4%E6%95%B0>