旗多様体に付随する商多様体のコホモロジー環について

数学専攻　安藤　眞

2020.2.26

1　はじめに

本論文 Goldin による論文 [1] に基づく総合報告である. [1] をもとに $SU(n)$ の余随伴軌道のコホモロジー環構造を決定することを目標とし, [1] には書かれていない具体例の計算までを行う.

2　準備

M を symplectic 多様体, G をコンパクト Lie 群, T をその極大トーラス, T が M にハミルトン作用しており, その moment map を $\phi : M \to \mathfrak{t}^*$ とする. また, $\mathfrak{t}$ を T の Lie 環, $\mathfrak{t}^*$ をその双対とする.

定義 2.1. ϕ の regular value μ に対して symplectic reduction を

$$M//T(\mu) := \phi^{-1}(\mu)/T$$

と定義する.

定理 2.2. (Kirwan'84)
moment map ϕ から誘導される制限

$$\kappa_\mu : H_T^*(M) \to H^*(M//T(\mu))$$

は全射である.

M をハミルトン T 作用を持つコンパクト symplectic 多様体とする.

定理 2.3. (Tolman-Weitsman[5])
${}^\forall \xi \in t$ に対して,

$$M_\xi^\mu := \{m \in M \mid \langle \phi(m),\ \xi \rangle \leq \langle \mu\ ,\ \xi \rangle\}$$
$$K_\xi := \{\alpha \in H_T^*(M) \mid \text{supp } \alpha \subset M_\xi^\mu\}$$

と定義する. このとき, $\kappa_\mu : H_T^*(M) \to H^*(M//T(\mu))$ の kernel は

$$K := \bigcup_{\xi \in t} K_\xi$$

によって生成されるイデアル $\langle K \rangle$ である.

3　double Schubert 多項式と Bruhat 順序

以下では $M = Fl(\mathbb{C}^n),\ G = U(n)\ T$ を極大トーラスとする.

定理 3.1.

$$H_T^*(Fl(\mathbb{C}^n)) = \frac{\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_u]}{(\prod_{i=1}^n (1+u_i) - \prod_{i=1}^n (1+x_i), \sum_{i=1}^n u_i)}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

ここで $\deg\ u_i = \deg\ x_i = 2$ で , u_i は $H_T^*(pt) \to H_T^*(Fl(\mathbb{C}^n))$ の像の生成元である.

$p_w := < l_{w(1)} > \subset < l_{w(1)}, l_{w(2)} > \subset \cdots \subset < l_{w(1)}, \cdots, l_{w(n)} >$ とする.

定理 3.2. $p_w \in Fl(V)$ に対して, 包含写像 $r_w : pt \to Fl(V)$ は制限写像

$$r_w^* : H_T^*(Fl(V)) \to H_T^*(pt) = \mathbb{C}[u_1 \cdots u_n] \ \ s.t.\ r_w^* : x_i \to u_{w(i)},\ r_w^* : u_i \to u_i$$

を誘導する. ここで x_i と u_i $(i = 1, \cdots, n)$ は同変コホモロジーの生成元である.

定義 3.3. $f(x_i, x_{i+1})$ を変数 x_i と x_{i+1} の多項式とする. $1 \leq i \leq n$ に対して Divided Difference Operator ∂_i を

$$\partial_i f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_i, x_{i+1}) - f(x_{i+1}, x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

と定義する.

定義 3.4. determinant polynomial $\Delta \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_u]$ を

$$\Delta(x, u) = \sum_{i<j} (x_i - u_j)$$

と定義する. identity double schubert polynomials を,

$$\mathfrak{T}_w^{id} = \partial_{w^{-1}} \Delta \qquad (w \in W)$$

と定義する. permuted double schubert polynomials を,

$$\mathfrak{T}_w^{\tau}(x, u) := \mathfrak{T}_{\tau^{-1}w}^{id}(x, u_\tau) \qquad (w, \tau \in W)$$

と定義する. ここで, u_τ は τ による u 変数の置換である.

$G = U(n),\ G^{\mathbb{C}} = GL(n; \mathbb{C}),\ B \subset G^{\mathbb{C}}$ を上三角行列全体とする.

定義 3.5. Schbert cells を

$$C_w := BwB/B \qquad (w \in W)$$

と定義し, Schbert 多様体を

$$X_w := \overline{BwB/B}$$

と定義する. 同様に, permuted Schbert cell を

$$C_w^\tau := \tau B \tau^{-1} wB/B \qquad (w, \tau \in W)$$

と定義し, permuted Schbert 多様体

$$X_w^\tau := \overline{\tau B \tau^{-1} w B/B}$$

を定義する.

定義 **3.6.** Bruhat 順序を

$$C_v \subset X_w \Leftrightarrow v \preceq w$$

と定義する. 同様に permuted Bruhat 順序を

$$C_v^\tau \subset X_w^\tau \Leftrightarrow v \preceq_\tau w$$

と定義する. そしてこれら 2 つの関係は

$$\tau^{-1} v \preceq \tau^{-1} w \Leftrightarrow v \preceq_\tau w$$

である.

4 コホモロジー環の決定について

$\lambda = (\lambda_1, \ \cdots, \ \lambda_n) \in \mathbb{R}^n (\simeq \mathfrak{t}^*)$ とし, $\mathscr{O}_\lambda$ を λ を通る余随伴軌道とする.

定理 **4.1.** (Goldin'01)
$\lambda_1, \ \cdots, \ \lambda_n$ が全て異なるとき, $H^*(\mathscr{O}_\lambda//T(\mu))$ は環

$$\frac{\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_u]}{(\prod_{i=1}^n (1+u_i) - \prod_{i=1}^n (1+x_i), \sum_{i=1}^n u_i, \partial_v \Delta(x, u_\tau))}$$

と同型になる. ここで deg u_i = deg x_i = 2 である. ただし $v, \tau \in S_n$ は $k = 1, \cdots, n-1$ に対して $\displaystyle\sum_{i=k+1}^n \lambda_{v(i)} < \sum_{i=k+1}^n \mu_{\tau(i)}$ をみたす.

補題 **4.2.** (Goldin'01)
$\alpha \in H_T^*(\mathscr{O}_\lambda)$ は supp $\alpha \subset (\mathscr{O}_\lambda)_\xi^\mu$ となる同変コホモロジー類とする. そのとき

$$^\exists \tau \in W \ , \ s.t. \ \alpha = \sum_{v \in W} a_v^\tau \mathfrak{T}_v^\tau$$

となる. ここで $a_v^\tau \in H_T^*(pt)$ が 0 でない $\Rightarrow$ supp $\mathfrak{T}_v^\tau \subset (\mathscr{O}_\lambda)_\xi^\mu$ である. さらに τ は ξ が $\phi(\lambda_\tau)$ で最小となるような weyl 群の元としてとれる.

定理 **4.3.** (Goldin'01)
$\lambda_1 = \cdots = \lambda_k, \ \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n$ のとき, $H^*(Gr(k,n)//T(\mu))$ は環

$$\frac{\mathbb{C}[\sigma_i(x_1, \cdots, x_k), \sigma_i(x_{k+1}, \cdots, x_n), u_1, \cdots, u_n]}{(\sigma_i(x_1, \cdots, x_n) - \sigma_i(u_1, \cdots, u_n), \sum_{i=1}^n u_i, \partial_v \Delta(x, u_\tau))}$$

と同型になる. ここで σ_i は対称多項式で deg u_i = deg x_i = 2 である. ただし $v, \tau \in S_n$ は $\displaystyle\sum_{i=k+1}^n \lambda_{v(i)} < \sum_{i=k+1}^n \mu_{\tau(i)}$ をみたし, $\partial_v \Delta(x, u_\tau)$ は $x_1, \cdots, x_k$ と $x_{k+1}, \cdots, x_n$ で対称である.

補題 **4.4.** (Goldin'01)
$\alpha \in H_T^*(Gr(k,n))$ とする．そのとき

$$\alpha = \sum_{w \in W} a_w^\tau \mathfrak{T}_w^\tau$$

と書ける．ここで $\mathfrak{T}_w^\tau$ は $x_{\tau^{-1}(1)}, \cdots, x_{\tau^{-1}(k)}$ と $x_{\tau^{-1}(k+1)}, \cdots, x_{\tau^{-1}(n)}$ で対称である．

5 具体例の計算

定理 **5.1.**

$$H_T^*(\mathscr{O}_\lambda//T(0)) = \frac{\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_4, u_1, \cdots, u_4]}{(\prod(1+u_i) - \prod(1+x_i),\ \sum_i u_i,\ \alpha_1, \cdots, \alpha_{14})}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (x_1 - u_4)(x_2 - u_4) \\
\alpha_5 &= x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - (u_2 + u_3 + u_4)(x_1 + x_2) + (u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4) \\
\alpha_9 &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 - (u_3 + u_4)(x_1 + x_2 + x_3) + (u_3^2 + u_3u_4 + u_4^2)
\end{aligned}$$

であり, 残る α は α_1, α_5, α_9 の u を置換して得られるものとする．

定理 **5.2.**

$$H^*(Gr(2,4)//T(\mu)) = \frac{\mathbb{C}[x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_1x_2, x_3x_4, u_1, \cdots, u_4]}{(\prod(1+u_i) - \prod(1+x_i), \sum_i u_i, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \cdots, \alpha_8)}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= x_1 + x_2 - (u_1 + u_2) \\
\alpha_1 &= (x_1 - u_4)(x_2 - u_4) \\
\alpha_5 &= x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - (u_2 + u_3 + u_4)(x_1 + x_2) + (u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4)
\end{aligned}$$

であり, 残る β, α は β_1, α_1, α_5 の u を置換して得られるものとする．

参考文献

[1] R.F.Goldin, The Cohomology Ring of Weight Varieties and Polygon Space, Advances in Mathematics 160, (2001), 175-204

[2] F.Kirwan, Cohomology of qQuotients in Symplectic and Algebraic Geometry, Mathematical Notes, Vol31, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1984

[3] J.W. ミルナー, J.D. スタシェフ, 特性類講義, 数学クラシックス, シュプリンガー, 2001

[4] L.W.TU, Computing characteristic numbers using fixed points, in A Celebration of the Mathematical Legacy of Raoul Bott, CRM Proceedings and Lecture Notes, Vol.50, American Mathematical Society, Providence, RI, (2010), 185-206

[5] S.Tolman and J.Weitsman, The cohomology rings of Abelian symplectic quotients, math.DG/9807173