複素 1 次元力学系における線形化不可能な周期点について

数学専攻　大門 恭輔

OHKADO, Kyosuke

1　はじめに

S をリーマン面, $f : S \longrightarrow S$ を定数でない正則写像とする. このとき, f の反復代入により S の不動点 $\hat{p}$ の周りがどのような振る舞いをするかを研究することが目的である.

2　準備

定義 2.1. S をリーマン面, $f : S \longrightarrow S$ を定数でない正則写像とし,

$$f^n := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}$$

を写像 f の n 回反復合成とする. このとき, f の Fatou 集合 $\mathcal{F}(f)$ を

$$\mathcal{F}(f) := \{z \in S \mid \exists U : z \text{ の近傍}, \{f^n|_U\}_{n \geqq 1} : \text{正規族}\}$$

により定義する. また, f の Julia 集合 $\mathcal{J}(f)$ を Fatou 集合の補集合として定義する.

定義 2.2. S をリーマン面, $f : S \longrightarrow S$ を定数でない正則写像とする. このとき, $\mathcal{O} = \{z_1,\ z_2, \cdots,\ z_m = z_0\}$ が周期 m の周期軌道であるとは,

$$f^m(z_i) = z_i \quad (i = 1,\ 2, \cdots,\ m)$$

が成り立つことである. この状況のとき, $\mathcal{O}$ の multiplier λ を

$$\lambda := (df^m)_{z_i} \in \mathbb{C}$$

により定義する. この λ は z_i の取り方に依らず一意的に決まる.

定義 2.3. S をリーマン面, $f : S \longrightarrow S$ を定数でない正則写像とし, $\mathcal{O}$ を f の周期軌道, λ を $\mathcal{O}$ の multiplier とする. このとき,

(1) $|\lambda| < 1$ のとき, $\mathcal{O}$ を f の吸引周期点

(2) $|\lambda| > 1$ のとき, $\mathcal{O}$ を f の反発周期点

(3) $|\lambda| = 1$ のとき, $\mathcal{O}$ を f の中立周期点

と呼ぶ. さらに, (1) の場合で特に $\lambda = 0$ のときは, $\mathcal{O}$ を超吸引周期点と呼ぶ. また, 中立周期点のうち, $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{Q})$ と表せるとき $\mathcal{O}$ を放物的周期点, そうでないとき $\mathcal{O}$ を無理的周期点と呼ぶ.

補題 2.4. 任意の吸引 (反発) 周期点は, $\mathcal{F}(f)(\mathcal{J}(f))$ に含まれる.

補題 2.5. 任意の放物的周期点は, $\mathcal{J}(f)$ に含まれる.

3 吸引不動点, 反発不動点の周りの線形化

局所的に $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への写像で, $\hat{p}=0$ が吸引 (反発) 不動点の場合を考える. つまり,

$$f(z)=\lambda z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots,\ |\lambda|\neq 0,\ 1 \tag{3.1}$$

の場合を考える.

命題 3.1. (3.1) において, 原点の十分小さい近傍 U と等角同相写像 $\phi: U \longrightarrow \phi(U)$ が存在し, $\phi(0)=0$ かつ

$$\phi(f(z))=\lambda\phi(z) \quad (z\in U)$$

が成り立つ.

4 超吸引不動点の周りの線形化

前節と同様に,

$$f(z)=z^n+b_1z^{n+1}+\cdots \quad (n\geqq 2) \tag{4.1}$$

の場合を考える.

命題 4.1. (4.1) において, 原点の十分小さい近傍 U と等角同相写像 $\phi: U \longrightarrow \phi(U)$ が存在し, $\phi(0)=0$ かつ

$$\phi(f(z))=\phi(z^n) \quad (z\in U)$$

が成り立つ. さらに, この ϕ は 1 の $n-1$ 乗根倍を除いて一意的に決まる.

5 放物的不動点の周りの線形化

第 3 節と同様に, 特に $\lambda=1$ とした,

$$f(z)=z(1+z^n+O(z^{n+1})) \tag{5.1}$$

の場合を考える.

定義 5.1. (5.1) において, 複素数 v が *repulsion vector* または *attraction vector* であるとは,

$$\textit{repulsion vector} \overset{def}{\Longleftrightarrow} nv^n=1$$

$$\textit{attraction vector} \overset{def}{\Longleftrightarrow} nv^n=-1$$

となることと定義する. さらに, v_0 をある repulsion vector とし, $v_1,\ v_2,\cdots,\ v_{2n-1}$ を,

$$v_j=\exp\left(\frac{\pi ij}{n}\right)v_0 \quad (j=0,\ 1,\cdots,\ 2n-1)$$

と定義する.

命題 5.2. f を (5.1) のものとし, z_0 の f(または f^{-1}) による軌道 $\{z_k\}_{k\geqq 0}$ が非自明に 0 に収束しているとする. このとき, ある attraction vector(または repulsion vector) v_j が存在して,

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[n]{k}z_k=v_j$$

が成り立つ. すなわち, 軌道 $\{z_k\}_{k\geqq 0}$ は, ある attraction vector(または repulsion vector) の方向に沿って 0 に収束する.

この命題から, 次の条件を満たす $2n$ 個の開集合 $\mathcal{P}_j(R)$ が定義される.
(j:奇数の場合)

・$\mathcal{P}_j(R) \cong \mathbb{H}_R^+$ $(R > 0)$ ・ $f(\mathcal{P}_j(R)) \subset \mathcal{P}_j(R)$

・ 任意の $z_0 \in \mathcal{P}_j(R)$ に対して, z_0 の f による軌道はある attraction vector v_j の定める直線に沿って 0 に収束する.

(j:偶数の場合)

・ $\mathcal{P}_j(R) \cong \mathbb{H}_R^-$ $(R < 0)$ ・ $f^{-1}(\mathcal{P}_j(R)) \subset \mathcal{P}_j(R)$

・ 任意の $z_0 \in \mathcal{P}_j(R)$ に対して, z_0 の f^{-1} による軌道はある repulsion vector v_j の定める直線に沿って 0 に収束する.

この $\mathcal{P}_j(R)$ を j が奇数のとき attracting petal, j が偶数のとき repelling petal とよぶ.

定義 5.3. (5.1) において, $\mathcal{P}$ を原点の attracting petal または repelling petal とする. このとき, $z \in \mathcal{P}$ に対して $f(z) \in \mathcal{P}$ となるとき z と $f(z)$ を同一視し, 同一視した商空間を $\mathcal{P}/f$ と定義する.

定理 5.4. (Écalle [2]) $\mathcal{P}$ を (5.1) の原点における attracting petal または repelling petal とする. このとき, 商空間 $\mathcal{P}/f$ は シリンダー $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ に等角同相である.

つまり, 以下の主張が成り立つ.

系 5.5. $\mathcal{P}$ を (5.1) の原点における attracting petal または repelling petal とする. このとき, $\mathbb{C}$ の平行移動の違いを除いて, ただ一つの埋め込み $\alpha : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C}$ が存在して,

$$\alpha(f(z)) = \alpha(z) + 1 \qquad (z \in \mathcal{P} \cap f^{-1}(\mathcal{P}))$$

が成り立つ.

6 無理的中立点の周りの振る舞いについて

第 3 節と同様に,

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \ \lambda = \exp(2\pi i \alpha) \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \tag{6.1}$$

の場合を考える.

定義 6.1. S をリーマン面, $f : S \longrightarrow S$ を定数ない正則写像とする. このとき, 無理的中立不動点 $\hat{p} \in S$ が *Siegel point* であるとは, $\hat{p}$ の十分小さい近傍 U と等角同相写像 $\phi : U \longrightarrow \phi(U)$ が存在し, $\phi(\hat{p}) = \hat{p}$ かつ

$$\phi(f(z)) = \lambda\phi(z) \qquad (z \in U)$$

が成り立つことである. すなわち, $\hat{p}$ の周りで線形化が可能なとき, $\hat{p}$ を *Siegel point* という. また, 無理的中立不動点 $\hat{p}$ が *Cremer point* であるとは, $\hat{p}$ の周りで線形化が不可能なことである.

定義 6.2. 無理数 α が *Bryuno condition* を満たすとは, α の連分数展開の近似分数列の分母の列を $\{q_n\}_{n \geqq 0}$ としたとき, $\{q_n\}_{n \geqq 0}$ が,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty$$

を満たすことである.

定理 6.3. (Rüssmann [5], Siegel [6]) $\lambda = \exp(2\pi i \alpha)$ の α が Bryuno condition を満たすならば, multiplier が λ である無理的中立不動点を持つ任意の正則写像 f の芽は, その不動点の周りで線形化可能である. すなわち, その無理的中立不動点は, Siegel point である.

α が Bryuno condition を満たさない場合, Yoccoz により次の定理が示された.

定理 6.4. (Yoccoz [7]) $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ とし, α が Bryuno condition を満たさないとする. このとき, 2 次多項式関数 $f(z) = \lambda z + z^2$ は原点の周りで線形化不可能である. すなわち, 原点は Cremer point である. さらに, このとき原点は small cycles property をもつ.

定義 6.5. S をリーマン面, $f : S \longrightarrow S$ を定数でない正則写像とする. このとき, 不動点 $\hat{p} = f(\hat{p})$ が *small cycles property* を持つとは, f が $\hat{p}$ に集積する周期軌道の列 $\{\mathcal{O}_k\}_{k\geqq 0}$ を持つことである.

ここで, Cremer point が small cycles property を持つかという疑問が生まれる. これに対する答えは, Perez-Marco により与えられた.

定理 6.6. (Perez-Marco [4]) $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ とし, α の連分数展開における近似分数列の分母の列を $\{q_n\}_{n\geqq 0}$ としたとき, $\{q_n\}_{n\geqq 0}$ が,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log\log q_{n+1}}{q_n} < \infty \tag{6.2}$$

を満たすならば, 原点で multiplier が λ となる Cremer point を持つ任意の正則写像の芽は small cycles property を持つ. さらに, (6.2) を満たさない, つまり (6.2) が発散している場合は, 原点で multiplier が λ となる Cremer point を持つ正則関数の芽で, 原点のある近傍内の軌道がすべて原点に集積するようなものが存在する.

参考文献

[1] 上田, 谷口, 諸澤 [1995], 複素力学系序説, 培風館

[2] J.Écalle[1975], *Théorie itérative : Introduction a la théorie des invariants holomorphes*, J.Math. Pure Appl. **54**, 183-258

[3] J. Milnor[2006], *Dynamics in One Complex Variable* THIRD EDITION, PRINCETON UNIVERSITY PRESS

[4] R. Pérez-Marco[1993], *Sur les dynamiques holomorphes non linéarisables et une conjecture de V.I.Arnold*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4éme Série, 26, 5, 565-644, 1993.

[5] Rüssmann[1967], *Über die Iteration analytischer Funktionen*, J. Math. and Mech. **17**, 523-532

[6] C.Siegel[1967], *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 747-817

[7] J.-C.Yoccoz[1998], *Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de* $(\mathbb{C}, 0)$, C.R.Acad.Sci.Paris **306**. 55-58