trigonal curve の moduli の有理性について
Rationality of moduli of trigonal curve

数学専攻 黒田　大貴
KURODA,Hiroki

1　背景

超楕円曲線の moduli$\mathcal{H}_g$ に関する有理性の証明はすでに先行結果が存在する．すなわち P.I. Katsylo は *Rationality of the moduli of hyperelliptic curves* (1984, 参考文献 [x]) において $\mathcal{H}_4$ の有理性を示し，彼の表現論的手法を一般の種数に拡張することにより F.A.Bogomolov は *Rationality of the moduli of hyperelliptic curves of arbitrary genus* (1986, 参考文献 [y]) ですべての g に対して $\mathcal{H}_g$ が有理的であることを証明した．しかし trigonal curve に関するこのような試みはされていないので, 研究のテーマとした.

2　目的

本研究においては以下の 2 つの定理を証明することが目的である.

- **主定理１．** $g \geqq 2$ に対して，$\mathcal{T}_g$ は既約な $2g+1$ 次元有理多様体である.
- **主定理２．** $g=2$ のとき $\mu : \mathcal{T}_2 \to \mathcal{M}_2$ は全射，$g=3,4$ のとき μ の像は $\mathcal{M}_g \setminus \mathcal{H}_g$ である．また $g \geqq 5$ ならば μ は単射であり，その像は余次元 $g-4$ をもつ.
  ここで $\mathcal{M}_g$ は非射影代数曲線の moduli, $\mathcal{H}_g$ は超楕円曲線の moduli を表す.

3　準備

定義 3.1. 種数 g の非特異かつ射影的な代数曲線 C が *trigonal curve* であるとは，写像度 3 の全射正則写像 $f\colon C \to \mathbb{P}^1$ が存在することをいう．またこの f を *trigonal map* という.

また trigonal map としての同型とは C_1, C_2 を trigonal curve , f,g を trigonal map としたとき次の図式が可換になることである.

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & C_2 \arrow[dl, "g"] \\ & \mathbb{P}^1 & \end{tikzcd} \tag{1}$$

また trigonal curve としての同型は $\mathcal{P}^1$ から $\mathcal{P}^1$ への同型があり次の図式が可換になることである。

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_2 \arrow[d, "g"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "\simeq"'] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd} \tag{2}$$

分岐点集合 $B = p_1, \ldots, p_k$, 基点 p_0 , p_0 の逆像 $f^{-1}(p_0)$ と 3 点集合 $\{1, 2, 3\}$ の同一視 μ を固定した 3 重被覆の同型類全体がつくる集合は，準同型 $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus B, p_0) \to S_3$ で, 各点で分岐し 3 重被覆になるような推移的に作用する表現と同一視することができる．分岐指数が 2 の個数を e_2,3 の個数を e_3 とすると Hurwitz の分岐公式により，等式 $2g + 4 = e_2 + 2e_3$ が成り立つ．$p \in \mathbb{P}^1$ に対して，p における f の分枝指数 branch index $b_f(p)$ を

$$b_f(p) = \begin{cases} 0 & f \text{ は } p \text{ 上不分岐} \\ 1 & f^{-1}(p) \text{ は二重分岐点 1 つと不分岐点の和} \\ 2 & f^{-1}(p) \text{ は三重分岐点} \end{cases}$$

と定義すると，f の重み付き branch point locus

$$B_f = \sum_{p \in \mathbb{P}^1} b_f(p)p$$

は $\mathbb{P}^1$ の有効因子で，その次数は $2g + 4$ である．B_f が reduced（すべての $b_f(p)$ が 1 以下）であることと，f の分岐点の分岐指数がすべて 2 であることとは同値である．以上をまとめると次のことを得る．

命題 3.2. 種数 g と基点付き射影直線 $(\mathbb{P}^1, p_0)$ を固定しておく．種数 g の非特異代数曲線 C から p_0 上不分岐な三重分岐被覆 $f : C \to \mathbb{P}^1$ と全単射 μ: $f^{-1}(p_0) \to \{1, 2, 3\}$ の組 (f, μ) の同型類全体の集合を $\tilde{\mathfrak{T}}_g$ で表したとき，以下が成立する．

(1) 対応 $(f, \mu) \mapsto B_f$ によって $\tilde{\mathfrak{T}}_g \to \{$ 次数 2g+4 の有効因子 $\}$ が決まり, 右の集合を $\mathbb{P}^{2g+4}$ と同一視することで, 正則写像 $\tilde{\mathfrak{T}}_g \to \mathbb{P}^{2g+4}$ を与える．

(2) 三重分岐点の数 k によって，$\tilde{\mathfrak{T}}_g$ には自然な stratification

$$\tilde{\mathfrak{T}}_g = \coprod_{0 \leqq k \leqq g+2} \tilde{\mathfrak{T}}_g^k$$

が入り，$\tilde{\mathfrak{T}}_g^{k+1}$ は $\tilde{\mathfrak{T}}_g^k$ の閉包に含まれる．特に $\tilde{\mathfrak{T}}_g^0$ の Zariski 閉包は $\tilde{\mathfrak{T}}_g \subset \mathrm{Hilb}(\mathcal{M}_g \times \mathbb{P}^1) \times S_3$ である．言い換えると，一般の 3 重被覆ではすべての分岐点で分岐指数は 2 である。

ここで

$$\tilde{\tilde{\mathfrak{T}}}_g^0 = \{(B, o, \tau, \iota, \rho) |\ \#B = 3g + 4, \mathrm{ord}(\rho(\gamma_i)) = 2\}$$

と定義する．

ここで証明において重要なアイデアを述べる．

補題 3.3. $\tilde{\tilde{\mathfrak{T}}}_g^0$ の元 (B, ι, ρ) に対して，B の元を $p_1, \ldots, p_{2g+4}$ とし，$g_i = \rho(\gamma_i)$ とおく．このとき次が成立する．

(1) ある番号 $i \in [1, 2g + 3]$ に対し，$g_i \neq g_{i+1}$ が成立していれば，適当に $\sigma \in Aut(\Gamma)$ を選ぶと以下が成立する．

- σ は γ_i, γ_{i+1} 以外の γ_j を動かさない．特に $\sigma^{-1}(\gamma_i\gamma_{i+1}) = \gamma_i\gamma_{i+1}$.

– $\rho\sigma^{-1}(\gamma_i) = (1,2), \quad \tau\rho\sigma^{-1}(\gamma_{i+1}) = (2,3)$ または $(3,1)$.

(2) ある番号 i, j $(2 \leqq i < j)$ に対して，$g_{i-1} = (1\,2) \neq g_i = \cdots = g_{j-1} \neq g_j$ が成り立っていれば，適当に $\sigma \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ を選ぶと以下が成立する．

– σ は $\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_{j+1}, \ldots \gamma_{2g+4}$ を動かさない．

– $\tau\rho\sigma^{-1}(\gamma_i) = \rho\sigma^{-1}(\gamma_i) = (1\,2)$．（変換後は $g_{i-1} = g_i = (1\,2)$ となる）．

(3) ある番号 $i \in [1, 2g+1]$ に対して，$g_i = (1,2) \neq g_{i+1} = g_{i+2} = g_{i+3}$ が成り立っていれば，適当に $\sigma \in \times\mathrm{Aut}(\Gamma)$ を選ぶと以下が成立する．

– σ は $\gamma_i, \gamma_{i+1}, \gamma_{i+2}, \gamma_{i+3}$ 以外の γ_j を動かさない．

– $\rho\sigma^{-1}(\gamma_i) = \rho\sigma^{-1}(\gamma_{i+1}) = \rho\sigma^{-1}(\gamma_{i+2}) = (1,2), \quad \tau\rho\sigma^{-1}(\gamma_{i+3}) = (2,3)$ または $(3,2)$.

(4) $(B, \iota, \rho) \in \tilde{\tilde{\mathfrak{T}}}^\circ$ の元に $S_3 \times \mathrm{Aut}(\Gamma)$ の元による変換を行うことにより，$g_1 = \cdots = g_{2g+2} = (1,2)$, $g_{2g+3} = g_{2g+4} = (2,3)$ と仮定してよい．

すなわち, 準同型 ρ に対して S_3 の内部自己同型および,1 つの互換で生成されない,$\gamma_1\gamma_2 ... \gamma_{2g+4} = 1$,$\gamma_i$ は互換と対応する, という条件のもと基本群の自己同型による変換で互換の種類を変更することができる．上記の補題により, 一般的な互換の積は $\overbrace{(1,2)(1,2)\ldots(1,2)}^{2k}\overbrace{(2,3)\ldots(2,3)}^{2g+4-2k}$ の形に直せる. したがって特に, 一般的な互換の積は

$$\overbrace{(1,2)(1,2)\ldots(1,2)}^{2g}(2,3)(2,3)(2,3)(2,3)$$

の形に同値である．$\tilde{\mathfrak{T}}_g^\circ = \tilde{\tilde{\mathfrak{T}}}_g^\circ/(S_3 \times Aut(\Gamma)), S_{2g+4}$ は $\overbrace{\mathbb{P}^1 \times \ldots \mathbb{P}^1}^{2g} \times \overbrace{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}^{4}/S_{2g} \times S_4$ のある open subset U と双有理同値でである. すなわち

$$\tilde{\mathfrak{T}}_g^0 = \tilde{\tilde{\mathfrak{T}}}_g^0/(S_3 \times Aut(\Gamma)), S_{2g+4} \sim U \subset \overbrace{\mathbb{P}^1 \times \ldots \mathbb{P}^1}^{2g} \times \overbrace{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}^{4}/S_{2g} \times S_4 = \mathbb{P}^{2g} \times \mathbb{P}^4$$

が成り立つ. したがって $\mathbb{P}^{2g} \times \mathbb{P}^4$ と双有理同値になる.

4 証明の方法

上記の結果を用いると

$$\mathfrak{T}_g^0 = \tilde{\mathfrak{T}}_g^0/PGL(2) \sim \mathbb{P}^{2g} \times \mathbb{P}^4/PGL(2)$$

が得られる．ここで V(r) を r 次の 2 変数斉次多項式の空間とすると,$\mathbb{P}^r = \mathbb{P}(V(r))$ である. そのため, 証明すべき定理を以下のように書き換えることができる.

補題 4.1. $\mathfrak{T}_g^\circ \sim \mathbb{P}(V(2g)) \times \mathbb{P}(V(4))/PGL(2)$ は 2g+1 次元の有理多様体である.

また

補題 4.2. $\mathbb{P}(V(4))/GL(2) = \mathbb{P}^1$

が成り立つ. この時

$$\psi\colon V(2g) \times \mathbb{P}(V(4))/GL(2) \to \mathbb{P}(V(4))/GL(2) = \mathbb{P}^1$$

を考えるとこれはベクトル束なので $\mathbb{A}^{2g+1} \times \mathbb{P}^1$ に双有理同値になる.$\mathbb{P}(V(2g)) \times \mathbb{P}(V(4))/PGL(2)$ は $V(2g) \times \mathbb{P}(V(4))/GL(2)$ を $\mathbb{C}^*$ で割ったものなので

$$\mathfrak{T}_g^0 \sim \mathbb{P}(V(2g)) \times \mathbb{P}(V(4))/PGL(2) \sim \mathbb{P}^{2g} \times \mathbb{P}^1 \sim \mathbb{P}^{2g+1}$$

が成り立ち,$\mathcal{T}_g^0$ が 2g+1 次元の既約有理多様体になるので主定理 1 が従う.

一方 $h\colon \mathbb{P}(V(2g))\times V(4)/PGL(2)\to\mathbb{P}(V(2g))/PGL(2)$ を考える．$\mathbb{P}(V(2g))/PGL(2)\sim\mathcal{H}_{g-1}$ であるので, $\mathbb{P}(V(2g))\times V(4)/PGL(2)$ は $\mathcal{H}_{g-1}\times\mathbb{A}^5$ と双有理であり, したがって

$$\mathbb{P}(V(2g))\times\mathbb{P}(V(4))/PSL(2)\sim\mathcal{H}_{g-1}\times\mathbb{P}^4$$

である. ここで $\mathbb{P}^{2g}\times\mathbb{P}^1\sim\mathbb{P}^{2g-3}\times\mathbb{P}^4$ であるので,

$$\mathcal{H}_{g-1}\times\mathbb{P}^4\sim\mathbb{P}^{2g-3}\times\mathbb{P}^4$$

が成り立つ. すなわち Katsylo,Bogomolov の結果の弱い形の結果が得られた.

主定理 2 に関しては以下の二つの定理の結果に従う.

- C の種数 g が 5 以上ならば，三重分岐被覆 $f\colon C\to\mathbb{P}^1$ は $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ の作用を法として一意的である.
- $g=2$, なら，C は無数の三重分岐被覆構造を持つ．$g\geqq 3$ で C が超楕円的ならば C は三重分岐構造を持たない．$g=3$ で C が超楕円的でなければ，C は無数の 3 重被覆構造を持つ．$g=4$ の一般の曲線 C は 2 つ以上の 3 重分岐被覆構造を持つ.

5　今後の展望

今後の研究では修士論文にて終えることのできなかった以下の 2 点について研究する予定である.

- $\tilde{\mathcal{T}}_g^k$ の既約成分の個数や有理性の証明
- trigonal curve の moduli のコンパクト化

6　参考文献

X P.I. Katsylo, *Rationality of the moduli of hyperelliptic curves*,Izvestiya AN SSSR (to appear in June 1984).

Y F. Bogomolov, *Rationality of the moduli of hyperelliptic curves of artibrary genus*, CMS Conferencce Proc. 6, American Mathematical Scieity, Providence, R.I., 1986.