q 超幾何方程式の変異形の解と合流

数学専攻 佐藤智輝

本研究では、[3],[7] で導入された q-Heun 方程式を用いて q 超幾何方程式の原点での特異性を別の点に移したものを定義し、その方程式の本質的に 4 つの明示的な解を与え、さらに、差分方程式での特異点の合流を考察した。

1　はじめに

次の方程式は Gauss の超幾何微分方程式 (Hypergeometric differential equation) と呼ばれる。

$$z(1-z)\frac{d^2 f}{dz^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)z\}\frac{df}{dz}-\alpha\beta f=0. \tag{1.1}$$

この方程式はフックス型の微分方程式で、3 点 $z=0,1,\infty$ を確定特異点に持ち、3 点を確定特異点に持つフックス型の微分方程式の標準形である。
(1.1) の $z=0$ での級数解の一つとして、Gauss の超幾何級数と呼ばれる、

$$f(z)={}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!}$$

を持つ。
ここで、

$$(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1),\ (a)_0=1$$

である。さらに (1.1) を $\beta=b,\ z\mapsto z/b$ と変数変換し、$b\to\infty$ とすると

$$z\frac{d^2 f}{dz^2}+(\gamma-z)\frac{df}{dz}-\alpha f=0 \tag{1.2}$$

を得る。(1.2) を合流型超幾何方程式 (または Kummer の微分方程式) と呼ぶ。

Gauss の超幾何微分方程式の q 類似として次の q 超幾何方程式が知られている。(以下、$0<q<1$ とする)

$$(c-abx)f(qx)-(c+q-(a+b)x)f(x)+(q-x)f(x/q)=0.$$

この方程式の解の一つとして、q 超幾何関数と呼ばれる、

$$f(x)={}_2\varphi_1(a,b;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(c;q)_n(q;q)_n}x^n\ \left(={}_2\phi_1(a,b;c;x)\right)$$

が知られている。[1],[2]
ここで、

$$(a;q)_n=(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}),\ (a;q)_0=1.$$

そして 4 点 $z=0,1,t,\infty$ を確定特異点にもつ微分方程式

$$\frac{d^2 f}{dz^2}+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\epsilon}{z-t}\right)\frac{df}{dz}+\frac{\alpha\beta z-E}{z(z-1)(z-t)}f=0$$

を Heun の微分方程式という。
ただし $\gamma+\delta+\epsilon=\alpha+\beta+1$ で、E は各特異点での特性指数に依存しない、アクセサリーパラメータと呼ばれるものである。
この Heun の微分方程式の q 類似として、次の q-Heun 方程式と呼ばれるものがある。

$$(a_0+a_1x+a_2x^2)f(qx)-(b_0+b_1x+b_2x^2)f(x)+(c_0+c_1x+c_2x^2)f(x/q)=0.$$

ただし、$a_0a_2c_0c_2\neq 0.$ この方程式は q 超幾何方程式と異なり、$f(qx), f(x/q)$ の係数が 2 次になっている。[3]

2　確定特異点と特性指数

常微分方程式のとき同様 [10] に、級数解を求めるため差分方程式の特性方程式と特性指数を以下のように定める。

Definition 1 2 階の q 差分方程式

$$(a_0+a_1x+a_2x^2)f(qx)+(b_0+b_1x+b_2x^2)f(x)+(c_0+c_1x+c_2x^2)f(x/q)=0$$

に対して、

$$a_0q^{\lambda}+b_0+c_0q^{-\lambda}=0 \tag{2.1}$$

を $x=0$ における特性方程式といい、

$$c_2q^{\lambda}+b_2+a_2q^{-\lambda}=0 \tag{2.2}$$

を $x=\infty$ における特性方程式という。さらに、特性方程式の解 λ を特性指数という。*[4][5][7]*
さらに、q 差分方程式のときも同様に特性指数を用いて、

$$f(x)=x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

の形で解が求められることが知られている。*[2][8]*

3　q-Heun 方程式と q 超幾何方程式の変異形

Definition 2 *q-Heun* 方程式を特殊化した

$$\begin{aligned}&(x-q^{h_1+1/2}t_1)(x-q^{h_2+1/2}t_2)g(x/q)+q^{\alpha_1+\alpha_2}(x-q^{l_1-1/2}t_1)(x-q^{l_2-1/2}t_2)g(qx)\\&-\Big[(q^{\alpha_1}+q^{\alpha_2})\,x^2-p\left\{\left(q^{-h_2}+q^{-l_2}\right)t_1+\left(q^{-h_1}+q^{-l_1}\right)t_2\right\}x+p(q^{1/2}+q^{-1/2})t_1t_2\Big]\,g(x)\\&=0\end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで $p=q^{(h_1+h_2+l_1+l_2+\alpha_1+\alpha_2)/2}$
を q 超幾何方程式の変異形 *(the variant of the q-hypergeometric equation)[8]* と呼ぶことにし、

$$\lambda=\frac{h_1+h_2-l_1-l_2-\alpha_1-\alpha_2+1}{2}$$

とおく。

4　q 超幾何方程式の変異形の解

竹村先生、松縄君、波多野君との共同研究で本質的に４つの以下の表示の解を得た。[8]

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{(q^{\lambda+\alpha_1};q)_n(q^{\lambda+\alpha_2};q)_n}{(q^{h_1-l_1+1};q)_n(q^{h_2-l_1+1}t_2/t_1;q)_n(q;q)_n}\left(\frac{x}{q^{l_1-1/2}t_1};q\right)_n \\
g(x) &= x^{-\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{\lambda+\alpha_1};q)_n}{(q^{\alpha_1-\alpha_2+1};q)_n}q^{-\frac{n}{2}}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{\lambda+\alpha_1-h_2+l_2}q)_k(q^{\lambda+\alpha_1-h_1+l_1})_{n-k}}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}}(q^{l_1}t_1)^k(q^{l_2}t_2)^{n-k}\right\}x^{-n} \\
g(x) &= x^{-\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n(q^{\lambda+\alpha_1};q)_n}{(q^{h_1-l_2+1}t_1/t_2;q)_n}\left\{\sum_{k=0}^{n}q^{k(k+1)/2}\frac{(q^{\lambda+\alpha_1+l_2-h_2};q)_k}{(q^{h_1-l_1+1};q)_k(q;q)_k(q;q)_{n-k}}(-q^{h_1-l_2}t_1/t_2)^k\right\}\left(\frac{q^{h_1+1/2}t_1}{x};q\right)_n \\
g(x) &= x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{q^{h_1+1/2}t_1}{x};q\right)_n\frac{(q^{\lambda+\alpha_1};q)_n(q^{\lambda+\alpha_2};q)_n}{(q^{h_1-l_1+1};q)_n(q^{h_1-l_2+1}t_1/t_2;q)_n(q;q)_n}\left(\frac{x}{q^{h_2-1/2}t_2}\right)^n
\end{aligned}
$$

5　q 超幾何方程式の変異形の合流

(3.1) を $q^{\alpha_2}\to 0, q^{l_2}\to\infty, q^{\alpha_2+l_2}=q^{h_1+h_2-l_1-\alpha_1-2\lambda+1}$ になるように極限をとると、

$$
\begin{aligned}
&q^{h_1+h_2-l_1-2\lambda+1/2}t_2(q^{l_1-\frac{1}{2}}t_1-x)g(qx)+(x-q^{h_1+\frac{1}{2}}t_1)(x-q^{h_2+\frac{1}{2}}t_2)g(x/q) \\
&-[q^{\alpha_1}x^2-r(q^{-h_2}t_1+q^{-h_1}t_2+q^{-l_1}t_2)x+r(q^{1/2}+q^{-1/2})t_1t_2]g(x)=0
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

に移行する。ここで、$r=q^{h_1+h_2-\lambda+1/2}$.
(3.1) と異なり、$g(qx)$ の係数が一次式になっている。

Theorem 5.1 *(5.1)* は $t_2\mapsto(1-q)^{-1}T^{-1}$ として、$q\to 1$ と極限を取り、さらに $g(x)=x^{\lambda}f(x)$ と変換すると、

$$
f''(x)+\left(\frac{h_1-l_1+1}{x-t_1}-T\right)f'(x)-T\frac{\lambda+\alpha_1}{(x-t_1)}f(x)=0 \tag{5.2}
$$

となり合流型超幾何方程式を得る。

6　二回合流させた q 超幾何方程式の変異形

さらに、(5.1) の合流を考える。(5.1) での $q^{-l_1}\to 0$ となるように極限をとると

$$
\begin{aligned}
&q^{h_1+h_2-2\lambda}t_1t_2g(qx)+(x-q^{h_1+1/2}t_1)(x-q^{h_2+1/2}t_2)g(x/q) \\
&-[q^{\alpha_1}x^2-q^{h_1+h_2-\lambda+1/2}(q^{-h_2}t_1+q^{-h_1}t_2)x+q^{h_1+h_2-\lambda+1/2}(q^{1/2}+q^{-1/2})t_1t_2]g(x)=0
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

に移行する。

Theorem 6.1 $q = 1 + \epsilon$ とし、$t_1^{-1} \mapsto B\epsilon^{1/2}(1 + B_1\epsilon^{1/2})$, $t_2^{-1} \mapsto -B\epsilon^{1/2}(1 + B_2\epsilon^{1/2})$ と変換し、$q \to 1$ と極限を取り、$g(x) = x^\lambda f(x)$ とおくと

$$f''(x) + [B^2x + B(B_1 - B_2)]f'(x) + B^2(\lambda + \alpha_1)f(x) = 0 \tag{6.2}$$

を得る。

7 まとめ

q-Heun 方程式を用いて、q 超幾何方程式の 0 での特異性をほかの点に移した方程式を導入し、それらの解を与えた。そこから差分方程式での合流を考えていった。後半部分の合流については [12] でさらに述べる予定である。

参考文献

[1] Heine, E. Über die Reihe $1 + \frac{(q^\alpha-1)(q^\beta-1)}{(q-1)(q^\gamma-1)}x + \frac{(q^\alpha-1)(q^{\alpha+1}-1)(q^\beta-1)(q^{\beta+1}-1)}{(q-1)(q^\gamma-1)(q^2-1)(q^{\gamma+1}-1)}x^2 + \cdots$, J. reine Angew Math. **32**, 210-212, (1846)

[2] Hahn,W. Beiträge zur Theorie der Heineschen Reihen., Math. Nachr. **2** 340-379(1949)

[3] Hahn,W. On Linear Geometric Difference Equtions with Accessory Parameters.Funkc. Ekvac. **14**, 73–78 (1971)

[4] Adams C.R., On the linear ordinary q-difference equation. , Ann. Math.**30**, 195–205 (1929)

[5] Adams C.R., Linear q-difference equations, Math. Soc. **37** (1931), 361-400

[6] Ohyama Y., A unified approach to q-special functions of the Laplace type, arXiv:1103.5232 [math.CA] (2011)

[7] Takemura K., On q-Deformations of the Heun Equation. SIGMA **14** (2018), 061, 16 pages

[8] Hatano N., Matsunawa R., Sato T., Takemura K., A variants of q-hypergeometric equation, arXiv:1910.12560

[9] R,Koekoek P, A.Lesky R, F.Swarttouw., Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues., Springer(2010)

[10] Kristensson, G., Second Order Differential Equations., Springer(2010)

[11] 松縄竜弥., q 超幾何方程式の変異形と q アペル関数 中央大学大学院修士論文., (2019)

[12] Matsunawa R., Sato T., Takemura K., in preparation