# モレー空間やモレー・ローレンツ空間上における
# 双線形分数積分作用素の有界性
# Boundedness of the bilinear fractional integral operators on Morrey and Morrey–Lorentz spaces

数学専攻　波多野修也
HATANO, Naoya

## はじめに

私は関数空間論の研究を行っている．その中でも主に Morrey 空間 [9] や Lorentz 空間 [8] を扱っていて, それらの構造を同時に合わせ持った Morrey–Lorentz 空間という関数空間に興味がある．関数空間を扱ううえで作用素の有界性の研究は必要不可欠である．そのため, Hardy–Littlewood の極大関数や Riesz ポテンシャル, Calderón–Zygmund 特異積分作用素など (半) 線形作用素の有界性は古くから研究がされてきた．その後, 拡張や応用がされ, 現代でも多く研究されている．特に Riesz ポテンシャル $I_\alpha$ については, パラメーター $0<\alpha<n$ と Lebesgue 可測関数 $f$ に対して,

$$I_\alpha f(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,\mathrm{d}y$$

で与えられているもので, ラプラシアンを用いて $I_\alpha f = C(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f$ に書き換えることができ, 調和解析や偏微分方程式論において重要な道具となっている．また, Riesz ポテンシャルの有界性に関しては, Lebesgue 空間上では Hardy–Littlewood–Sobolev の不等式, Morrey 空間上では Adams の定理 [1] としてよく知られている．

本研究では, Morrey 空間上における双線形分数積分作用素 $\mathcal{J}_\alpha$ の有界性をテーマに研究を行っていた．双線形分数積分作用素 $\mathcal{J}_\alpha$ は Riesz ポテンシャルの双線形の場合の拡張となっているものとして Grafakos 氏 [4] によって導入された．この課題は, 先行研究として He 氏と Yan 氏 [6] によって一部結果が知られていて残りは未解決となっている．そこで残りの部分について議論をした．その後さらに, その結果を一部 Morrey–Lorentz 空間上の有界性へと拡張した．

## 1　導入

$0<q\le p<\infty$ とする．このとき, Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ は以下のように定義される．

$$\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \equiv \{f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \equiv \sup_{Q\in\mathcal{D}} |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\chi_Q\|_{L^q} < \infty\}$$

ただし, 上限は二進立方体 $\mathcal{D}$;

$$\mathcal{D} \equiv \left\{ Q_{jm} \equiv \prod_{i=1}^n \left[\frac{m_i}{2^j}, \frac{m_i+1}{2^j}\right) : j \in \mathbb{Z}, m=(m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

全体に取る．そして, $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ は任意のコンパクト集合 $K$ に対して, $f\chi_K \in L^q(\mathbb{R}^n)$ を満たすような Lebesgue 可測関数 $f$ 全体である．また, パラメーター $0<\alpha<n$ と可測関数 $f_1, f_2$ に対して, 双線形分数積分作用素 $\mathcal{J}_\alpha$ は

$$\mathcal{J}_\alpha[f_1,f_2](x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_1(x+y)f_2(x-y)}{|y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

と定義される．

**定理 1.1**

$0<\alpha<n$, $1<q_1\le p_1<\infty$, $1<q_2\le p_2<\infty$ $0<t\le s<\infty$ に対して, $p,q$ を

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2},\quad \frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}.$$

を満たすようにとる．さらに条件

$$\frac{1}{s}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n},\quad \frac{s}{p}=\frac{t}{q},\quad s<\min(q_1,q_2).$$

を仮定する．このとき, 任意の $f_1\in\mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n)$ と $f_2\in\mathcal{M}^{p_2}_{q_2}(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\|\mathcal{J}_\alpha[f_1,f_2]\|_{\mathcal{M}^s_t}\le C\|f_1\|_{\mathcal{M}^{p_1}_{q_1}}\|f_2\|_{\mathcal{M}^{p_2}_{q_2}}.$$

が成り立つ．

この定理の証明は,

$$(a)\,1\le t\le s<\infty,\quad (b)\,0<t\le s<1,\quad (c)\,0<t\le 1\le s<\infty.$$

の三つに場合分けして証明を与えた．場合 (a) は論文 [7, 5] で与えられているアトム分解を用いて得られた．場合 (b), (c) は, 新たに平均値に対する以下のようなノルム評価を与え, それを用いて得られた．

**定理 1.2**

$0<q\le p<1$ とする．このとき, 二進立方体 $Q_j$ に台を持つような任意の非負値可積分関数列 $f_j$, $j=1,2,\ldots,$ に対して,

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty}f_j\right\|_{\mathcal{M}^p_q}\lesssim\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}f_j(y)\,\mathrm{d}y\right)\chi_{Q_j}\right\|_{\mathcal{M}^p_q}$$

が成り立つ．

**定理 1.3** ([7])

$0<q\le 1\le p<u$ とする．このとき, 二進立方体 $Q_j$ に台を持つような任意の非負値可積分関数列 $f_j$, $j=1,2,\ldots,$ に対して,

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty}f_j\right\|_{\mathcal{M}^p_q}\lesssim\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}f_j(y)^u\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{u}}\chi_{Q_j}\right\|_{\mathcal{M}^p_q}$$

が成り立つ．

## 2 Morrey–Lorentz 空間の研究

現在, 修士論文の内容と並行して Morrey–Lorentz 空間という Morrey 空間の拡張となっている関数空間について調べている．特に最近では, Morrey–Lorentz 空間のアトム分解について研究を行った．本節では, その結果得られた定理の応用として双線形分数積分作用素の Morrey–Lorentz 空間上の有界性を述べる．

Morrey–Lorentz 空間は Ragusa 氏 [10] によって導入され, Ferreira 氏 [3], Almeida 氏と Lima 氏 [2] によって基本的な作用素の有界性の証明や偏微分方程式への応用が行われた．まず Morrey–Lorentz 空間の導入を行うために, Lorentz 空間の定義を思い出しておく．

**定義 2.1 (Lorentz 空間)**
$f$ を *Lebesgue* 可測関数とし，分布関数 $\lambda_f$ と再配分関数 $f^*$ を以下のように与える: 正の数 $t$ に対し，

$$\lambda_f(t) \equiv |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}|, \quad f^*(t) \equiv \inf(\{s \in [0,\infty) : \lambda_f(s) \le t\} \cup \{\infty\}).$$

$0 < p, q < \infty$ とする．このとき，*Lorentz* 空間 $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ を擬ノルム

$$\|f\|_{L^{p,q}} \equiv \begin{cases} \left\{ \displaystyle\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right\}^{\frac{1}{q}}, & 0 < p, q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & 0 < p \le \infty, q = \infty \end{cases}$$

が有界となるような *Lebesgue* 可測関数 $f$ 全体として定義する．

**定義 2.2 (Morrey–Lorentz 空間)**
$0 < q \le p < \infty$, $0 < r \le \infty$ とする．このとき，*Morrey–Lorentz* 空間 $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ は擬ノルムを

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \equiv \sup_{Q \in \mathcal{D}} |Q|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f \chi_Q\|_{L^{q,r}}$$

として，

$$\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n) \equiv \{f \in L^{q,r}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} < \infty\}$$

と定義される．

**注意 2.3**
*Morrey–Lorentz* 空間とは，*Morrey* 空間や *Lorentz* 空間の一般化となっている:

$$\mathcal{M}^p_{q,q}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{M}^p_{p,q}(\mathbb{R}^n) = L^{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

また，*Morrey* 空間や *Lorentz* 空間に埋め込みが知られているように，*Morrey–Lorentz* 空間にも同様な埋め込みが知られている．

*(1)* $q_2 < q_1$ ならば，$\mathcal{M}^p_{q_1,r_1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}^p_{q_2,r_2}(\mathbb{R}^n)$;
*(2)* $r_1 \le r_2$ ならば，$\mathcal{M}^p_{q,r_1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}^p_{q,r_2}(\mathbb{R}^n)$.

*(1), (2)* はそれぞれ *Morrey* 空間と *Lorentz* 空間のときに現れた埋め込みの拡張になっている．特に特別な場合を考えれば，$q < p$ のとき，埋め込み $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ が成り立つことがわかる．

このとき，既存の結果として与えられている Morrey 空間に対するアトム分解 ([7] 参照) を以下のように拡張させた．

**定理 2.4**
パラメーター $1 < q \le p < \infty$, $1 < t \le s < \infty$, $0 < r < \infty$, $0 < u \le \infty$ と $\{Q_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}^s_{t,u}(\mathbb{R}^n)$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \subset [0,\infty)$ をとる．このとき，

$$q < t, \quad p < s, \quad \mathrm{supp}(a_j) \subset Q_j$$

を満たすなら，級数 $f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j a_j$ は $L^{q,r}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ の位相で収束し，ある定数 $C = C(p,q,r,s,t,u)$ が存在して

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \le C \left\| \sum_{j=1}^\infty \lambda_j \frac{\|a_j\|_{\mathcal{M}^s_{t,u}}}{|Q_j|^{\frac{1}{s}}} \chi_{Q_j} \right\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}$$

が成り立つ．

よって, この定理を応用して定理 1.1 の場合 (a) を拡張した.

**定理 2.5**

$0<\alpha<n$, $1<q_1\le p_1<\infty$, $1<q_2\le p_2<\infty$, $0<r_1,r_2,u<\infty$, $1<t\le s<\infty$ とする. さらに, パラメーター $p$, $q$, $r$ を

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2},\quad \frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2},\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$$

を満たすようにとる. そして, 条件

$$\frac{1}{s}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n},\quad \frac{s}{p}=\frac{t}{q}=\frac{u}{r},\quad s<\min(q_1,q_2).$$

を仮定する. このとき, 任意の $f_1\in\mathcal{M}^{p_1}_{q_1,r_1}(\mathbb{R}^n)$ と $f_2\in\mathcal{M}^{p_2}_{q_2,r_2}(\mathbb{R}^n)$ に対して, 定数 $C$ が存在して

$$\|\mathcal{J}_\alpha[f_1,f_2]\|_{\mathcal{M}^s_{t,u}}\le C\|f_1\|_{\mathcal{M}^{p_1}_{q_1,r_1}}\|f_2\|_{\mathcal{M}^{p_2}_{q_2,r_2}}$$

が成り立つ.

# 3 終わりに

本研究では, Morrey 空間上における双線形分数積分作用素の有界性について研究をし, さらにその一部において Morrey–Lorentz 空間へと拡張を行った. しかし, 定理 1.1 の条件 $s<\min(q_1,q_2)$ が外せるかどうかが未解決となっている. 今後は, この問題を突き詰めていきたい.

# 参考文献


[1] D. R. Adams, A note on Riesz potentials, Duke Math. J. 42 (1975), no. 4, 765–778.

[2] M. F. de Almeida, and L. S. M. Lima, “Nonlinear boundary problem for Harmonic functions in higher dimensional Euclidean half–spaces,” available at http://arxiv.org/abs/1807.04122v1.

[3] L. C. F. Ferreira, “On a bilinear estimate in weak–Morrey spaces and uniqueness for Navier–Stokes equations,” J. Math. Pures Appl. (9) **105** (2), 228–247 (2016).

[4] L. Grafakos, On multilinear fractional integrals, Studia Math. **102** (1992), 49–56.

[5] V. S. Guliyev, S. G. Hasanov, Y. Sawano and T. Noi, Non-smooth atomic decompositions for generalized Orlicz-Morrey spaces of the third kind, Acta Appl. Math. **145** (2016), 133–174.

[6] Q. He and D. Yan, Bilinear fractional integral operators on Morrey spaces, available at http://arxiv.org/abs/1805.01846v2.

[7] T. Iida, Y. Sawano and H. Tanaka, Atomic Decomposition for Morrey Spaces, Z. Anal. Anwend. **33** (2014), no. 2, 149–170.

[8] G. G. Lorentz, “Some new functional spaces,” Ann. of Math. **51** (2), 37–55 (1950).

[9] Morrey Jr., C.B., On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Am. Math. Soc. **43**(1), 126–166 (1938).

[10] M. A. Ragusa, Embeddings for Morrey–Lorentz spaces, J. Optim. Theory Appl. 154 (2012), no. 2, 491–499.