q 超幾何方程式の変異形の解と q アペル関数

Variants of q-hypergeometric equation and q-Appell function

数学専攻 松縄竜弥

Ryuya Matsunawa

本研究では、q 超幾何方程式の変異形の解と、2 変数の超幾何級数の 1 つである q アペル関数との関係を考察した。

1 はじめに

次の方程式は Heun の微分方程式と呼ばれる。

$$\frac{d^2f}{dz^2}+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\epsilon}{z-t}\right)\frac{df}{dz}+\frac{\alpha\beta z-B}{z(z-1)(z-t)}f=0. \tag{1.1}$$

ただし、$\gamma+\delta+\epsilon=\alpha+\beta+1$ で、リーマン球面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ において 4 点 $z=0,1,t,\infty$ を確定特異点に持つ。
また、B は各特異点の特性指数に依存しないアクセサリーパラメータと呼ばれるものである。
この Heun の微分方程式の q 類似として、次の q-Heun 方程式と呼ばれるものがある。

$$(a_0+a_1x+a_2x^2)f(qx)-(b_0+b_1x+b_2x^2)f(x)+(c_0+c_1x+c_2x^2)f(x/q)=0. \tag{1.2}$$

ただし、$a_0a_2c_0c_2\neq 0$. この方程式は、各係数が 2 次式になっていることに注意する。また、極限 $q\to 1$ によってホインの微分方程式に復元される。[3]
さらに、q-Heun 方程式の別表示として以下の差分方程式を与える。

$$\begin{aligned}&(x-q^{h_1+1/2}t_1)(x-q^{h_2+1/2}t_2)g(x/q)\\&-\{(q^{\alpha_1}+q^{\alpha_2})x^2+Ex+q^{(h_1+h_2+l_1+l_2+\alpha_1+\alpha_2)/2}(q^{\beta/2}+q^{-\beta/2})t_1t_2\}g(x)\\&+q^{\alpha_1+\alpha_2}(x-q^{l_1-1/2}t_1)(x-q^{l_2-1/2}t_2)g(qx)=0.\end{aligned} \tag{1.3}$$

E はアクセサリーパラメータとみなせる。(1.2) と同様に各係数は 2 次式である。
$\beta=1,\ \ E=-q^{(h_1+h_2+l_1+l_2+\alpha_1+\alpha_2)/2}\{(q^{-h_2}+q^{-l_2})t_1+(q^{-h_1}+q^{-l_1})t_2\}$ として (1.3) を特殊化する。

$$\begin{aligned}&(x-q^{h_1+1/2}t_1)(x-q^{h_2+1/2}t_2)g(x/q)\\&-\Big[(q^{\alpha_1}+q^{\alpha_2})x^2-p\{(q^{-h_2}+q^{-l_2})t_1+(q^{-h_1}+q^{-l_1})t_2\}x+p(q^{1/2}+q^{-1/2})t_1t_2\Big]g(x)\\&+q^{\alpha_1+\alpha_2}(x-q^{l_1-1/2}t_1)(x-q^{l_2-1/2}t_2)g(qx)=0.\end{aligned} \tag{1.4}$$

ただし、$p=q^{(h_1+h_2+l_1+l_2+\alpha_1+\alpha_2)/2}$ とする。(1.4) を q 超幾何方程式の変異形 (the variant of the q-hypergeometric equation) と呼ぶ。

2 q 差分方程式

この節では、差分方程式の特性方程式と特性指数について定義していく。

Definition 1 2 階の q 差分方程式

$$(a_0+a_1x+a_2x^2)f(qx)+(b_0+b_1x+b_2x^2)f(x)+(c_0+c_1x+c_2x^2)f(x/q)=0$$

に対して、

$$a_0q^{\lambda}+b_0+c_0q^{-\lambda}=0 \tag{2.1}$$

を $x=0$ における特性方程式といい、

$$c_2q^{\lambda}+b_2+a_2q^{-\lambda}=0 \tag{2.2}$$

を $x=\infty$ における特性方程式という。さらに、特性方程式の解 λ を特性指数という。
(1.4) で示した q 超幾何方程式の変異形の $x=0,\infty$ における特性方程式はそれぞれ

$$q^{\alpha_1+\alpha_2+l_1+l_2-1}q^{\lambda}+q^{(h_1+h_2+l_1+l_2+\alpha_1+\alpha_2)/2}(q^{1/2}+q^{-1/2})+q^{h_1+h_2+1}q^{-\lambda}=0, \tag{2.3}$$

$$q^{\lambda}-(q^{\alpha_1}+q^{\alpha_2})+q^{\alpha_1+\alpha_2}q^{-\lambda}=0 \tag{2.4}$$

であるから、$x=0$ の特性指数は $\lambda=(h_1+h_2-l_1-l_2-\alpha_1-\alpha_2+1)/2,\ \ (h_1+h_2-l_1-l_2-\alpha_1-\alpha_2-1)/2$, $x=\infty$ の特性指数は $\lambda=\alpha_1,\ \ \alpha_2$ となる。本論文では、$x=\infty$ における級数解について示していく。

3　q アペル関数

アペル関数について定義するにあたり、先に超幾何級数について述べておく。

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}z^2+\cdots+\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n. \tag{3.1}$$

ただし、$(\lambda)_n=\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)$.
超幾何級数は以下のガウスの超幾何微分方程式

$$z(1-z)\frac{d^2f}{dz^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)z\}\frac{df}{dz}-\alpha\beta f=0 \tag{3.2}$$

の解である。ガウスの超幾何微分方程式は 3 点 $\{0,1,\infty\}$ を確定特異点に持つフックス型微分方程式の標準形である。フックス型微分方程式とは、リーマン球面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ で定義された特異点が全て確定特異点となるものを指す。
さらに、ガウスの超幾何微分方程式の q 類似として、以下の q 超幾何方程式が知られている。[2]

$$(c-abx)f(qx)-\{c+q-(a+b)x\}f(x)+(q-x)f(x/q)=0. \tag{3.3}$$

q 超幾何方程式の解の一つとして、次の q 超幾何関数がある。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(c;q)_n(q;q)_n}x^n. \tag{3.4}$$

ただし、$(a;q)_n=(1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{n-1}a)$.
超幾何級数をもとに、2 変数に対する超幾何級数として次のアペル関数 (Appell function) を与える。

Definition 2 アペル関数

$$F_1(a;b,b';c;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{m!n!(c)_{m+n}}x^my^n. \tag{3.5}$$

このアペル関数の q 類似として、以下の q アペル関数 (q-Appell function) が知られている。[1]

Definition 3 q アペル関数

$$f(x,y)=\Phi^{(1)}(a;b,b';c;q;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_{m+n}(b;q)_m(b';q)_n}{(c;q)_{m+n}(q;q)_m(q;q)_n}x^my^n. \tag{3.6}$$

q アペル関数は、$|q|,\ |x|,\ |y|<1$ の条件を満たすときのことを指し、このとき絶対収束する。

Theorem 3.1 q アペル関数は以下の差分方程式を満たす。*[1]*

$$\left(abx-\frac{c}{q}\right)f(q^2x,qy)+(1-bx)f(qx,y)+\left(\frac{c}{q}-ax\right)f(qx,qy)+(x-1)f(x,y)=0, \tag{3.7}$$

$$\left(ab'y-\frac{c}{q}\right)f(qx,q^2y)+(1-b'y)f(x,qy)+\left(\frac{c}{q}-ay\right)f(qx,qy)+(y-1)f(x,y)=0. \tag{3.8}$$

Theorem 3.2 (3.7), (3.8) より、以下の差分方程式を得る。*[4]*

$$\begin{aligned}&\left(abqx-\frac{c}{q}\right)\left(ab'qy-\frac{c}{q}\right)f(q^3x,q^3y)\\&-\left\{\left(\frac{c}{q}-aqy\right)\left(\frac{c}{q}-aqx\right)-\left(abqx-\frac{c}{q}\right)(1-b'qy)+q(1-bx)\left(ab'y-\frac{c}{q}\right)\right\}f(q^2x,q^2y)\\&+\left[q\left\{(y-1)\left(\frac{c}{q}-ax\right)-(1-b'y)(1-bx)\right\}-(qx-1)\left(\frac{c}{q}-aqy\right)\right]f(qx,qy)\\&+q(x-1)(y-1)f(x,y)=0.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Theorem 3.3 q アペル関数は $bb'=c$ と制限することにより、以下の差分方程式を満たす。*[4]*

$$\begin{aligned}&(aqx-b')(aqy-b)f(q^2x,q^2y)\\&-\{aq(q+1)xy-q(a+b)x-q(a+b')y+c+q\}f(qx,qy)+q(x-1)(y-1)f(x,y)=0.\end{aligned} \tag{3.10}$$

4 q 超幾何方程式の変異形の解

(1.4), (3.10) を比較し、q アペル関数で、(x,y) を $\left(\frac{d_1}{x},\frac{d_2}{x}\right)$ とおき、$f(qx,qy)=f\left(\frac{qd_1}{x},\frac{qd_2}{x}\right)=x^{d_3}g(x)$ と置いたとき、

$$\begin{cases}a=q^{(\alpha_1-\alpha_2+h_1+h_2-l_1-l_2+1)/2}=q^{\lambda_1+\alpha_1},\\b=q^{(\alpha_1-\alpha_2+h_1-h_2-l_1+l_2+1)/2}=q^{\lambda_1+\alpha_1-h_2+l_2},\\b'=q^{(\alpha_1-\alpha_2-h_1+h_2+l_1-l_2+1)/2}=q^{\lambda_1+\alpha_1-h_1+l_1},\\d_1=q^{l_1-1/2},\quad d_2=q^{l_2-1/2},\quad d_3=\alpha_1\end{cases}$$

とパラメータを定めることで q アペル関数が満たす差分方程式に条件を加えることで、q 超幾何方程式の変異形を示すことができた。また、定めたパラメータを q アペル関数に代入することで、q 超幾何方程式の変異形の解を得ることができた.

Theorem 4.1 [4]

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x^{-\alpha_1}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q^{\lambda_1+\alpha_1-h_2+l_2};q)_k(q^{\lambda_1+\alpha_1-h_1+l_1};q)_l}{(q;q)_k(q;q)_l}\frac{(q^{\lambda_1+\alpha_1};q)_{k+l}}{(q^{\alpha_1-\alpha_2+1};q)_{k+l}}\left(\frac{q^{l_1+1/2}t_1}{x}\right)^k\left(\frac{q^{l_2+1/2}t_2}{x}\right)^l \\
&= x^{-\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{\lambda_1+\alpha_1};q)_n}{(q^{\alpha_1-\alpha_2+1};q)_n}\left(\frac{q^{1/2}}{x}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{\lambda_1+\alpha_1-h_2+l_2};q)_k(q^{\lambda_1+\alpha_1-h_1+l_1};q)_{n-k}}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}}(q^{l_1}t_1)^k(q^{l_2}t_2)^{n-k}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

は (1.4) の解。ただし、$\lambda_1 = \dfrac{h_1+h_2-l_1-l_2-\alpha_1-\alpha_2+1}{2}$. また、特性指数 α_1 を α_2 に置き換えても解。

Theorem 4.2 他にも、竹村先生、佐藤君、波多野君との共同研究で以下の表示の解を得た。

$$
\begin{aligned}
g(x) =& x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}q^n\frac{(q^{\lambda+\alpha_1};q)_n(q^{\lambda+\alpha_2};q)_n}{(q^{h_1-l_1+1};q)_n(q^{h_2-l_1+1}t_2/t_1;q)_n(q;q)_n}\left(\frac{x}{q^{l_1-1/2}t_1};q\right)_n \\
g(x) =& x^{-\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n(q^{\lambda+\alpha_1};q)_n}{(q^{h_1-l_2+1}t_1/t_2;q)_n} \\
&\times\left\{\sum_{k=0}^{n}q^{k(k+1)/2}\frac{(q^{\lambda+\alpha_1+l_2-h_2};q)_k}{(q^{h_1-l_1+1};q)_k(q;q)_k(q;q)_{n-k}}(-q^{h_1-l_2}t_1/t_2)^k\right\}\left(\frac{q^{h_1+1/2}t_1}{x};q\right)_n \\
g(x) =& x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{q^{h_1+1/2}t_1}{x};q\right)_n\frac{(q^{\lambda+\alpha_1};q)_n(q^{\lambda+\alpha_2};q)_n}{(q^{h_1-l_1+1};q)_n(q^{h_1-l_2+1}t_1/t_2;q)_n(q;q)_n}\left(\frac{x}{q^{h_2-1/2}t_2}\right)^n
\end{aligned}
$$

は (1.4) の解。

5 まとめ

q アペル関数が満たす差分方程式に条件を加えることで、q 超幾何方程式の変異形を示し、その解を求めた。

参考文献

[1] Gasper George., Mizan Rahman. Basic hypergeometric series. Vol. 96. Cambridge university press, (2004)

[2] Hahn,W. Beiträge zur Theorie der Heineschen Reihen., Math. Nachr. **2** 340-379(1949)

[3] Hahn,W. On Linear Geometric Difference Equtions with Accessory Parameters.Funkc. Ekvac.**14**, 73-78 (1971)

[4] Hatano N., Matsunawa R., Sato T., Takemura K., A variants of q-hypergeometric equation, arXiv:1910.12560

[5] Heine, E. Über die Reihe $1+\frac{(q^\alpha-1)(q^\beta-1)}{(q-1)(q^\gamma-1)}x+\frac{(q^\alpha-1)(q^{\alpha+1}-1)(q^\beta-1)(q^{\beta+1}-1)}{(q-1)(q^\gamma-1)(q^2-1)(q^{\gamma+1}-1)}x^2+\cdots$, J. reine Angew Math. **32**, 210-212, (1846)

[6] Matsunawa R., Sato T., Takemura K., in preparation

[7] 佐藤智輝 q 超幾何方程式の変異形の解と合流 中央大学大学院修士論文., (2020)

[8] Takemura K., On q-Deformations of the Heun Equation. SIGMA **14** (2018), 061, 16 pages