情報理論の不等式から導かれる重力の正エネルギー定理

- Gravitational Positive Energy Theorems and Information Inequalities -

物理学専攻　田中庸介
Yosuke Tanaka

概要

本論文では共形場理論の相対エントロピーが，重力理論を用いてどのように記述されるのかについて，現在までに得られている知見をまとめる．Anti de Sitter/Conformal Field Theory(AdS/CFT) 対応を用いると，ある種の共形場理論は高次元の負の曲率を持つ時空での重力理論に置き換えることができる [1]．Lashkari らは，この対応を用いて共形場理論の相対エントロピーを重力理論の枠組みで記述する方法を提案し，相対エントロピーの非負性から重力理論の準局所エネルギーに対する新しい不等式を提案した [2]．本論文ではその詳細を解説するとともに，この不等式を応用することで共形不変なプラズマのずり粘性に対して制限が与えられる可能性について論じる．

共形場理論の相対エントロピー

一般の量子系について，相対エントロピーはある状態 ρ と参照状態 σ の分布の異なりを数値化する測度である．その定義は，

$$S(\rho||\sigma)=\operatorname{tr}(\rho\log\rho)-\operatorname{tr}(\rho\log\sigma) \tag{1}$$

である．ただし，ρ と σ はそれぞれ状態 ρ と参照状態 σ の密度行列である．これは，モジュラー Hamiltonian $H=-\log\sigma$，von Neumann エントロピー $S(\rho)=-\operatorname{tr}(\rho\log\rho)$ を用いて以下のように表現することができる．

$$S(\rho||\sigma)=\Delta\langle H\rangle-\Delta S \tag{2}$$

ここで，Δ は ρ と σ での差を意味している．相対エントロピーは非負であることが一般的に証明されている．以降の議論では，d 次元の共形場理論を考える．それに加え，相対エントロピーの参照状態 σ は共形場理論の真空にとり，領域の形状は球状に限って考えることとする．

参照状態が真空で球状領域 B での相対エントロピーは領域 B でのモジュラー Hamiltonian H_B とエンタングルメントエントロピー (縮約密度行列に対応する von Neumann エントロピー)S_B で

$$S\left(\rho_B\|\rho_B^{\mathrm{vac}}\right)=\Delta\left\langle H_B\right\rangle-\Delta S_B \tag{3}$$

と表される．特に H_B は,

$$H_B=\int_B\epsilon^\mu T_{\mu\nu}\zeta_B^\nu, \tag{4}$$

$$\zeta_B=\frac{\pi}{R}\left[R^2-(t-t_0)^2-|\vec{x}-\vec{x}_0|^2\right]\partial_t-2\left(t-t_0\right)\left(x^i-x_0^i\right)\partial_i \tag{5}$$

で表される [3]．ただし，R は球状領域 B の半径で，ϵ^μ は B 上の体積形式で $\epsilon_v=\epsilon_{v\mu_1\cdots\mu_{d-1}}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu^{d-1}}/(d-1)!$ なるものである．H_B の期待値は表式のエネルギー運動量テンソルに求める状態のものを代入することで計算される．

重力の準局所エネルギー

重力系には等価原理により局所的な観測量はないと考えられているが，Cauchy 面の部分空間 Σ を一般座標変換不変に定義できる場合に Σ での準局所エネルギーを定式化することができる [4][5].

ここでは解析力学に則る準局所エネルギーの定義を紹介する．Einstein-Hilbert 作用の $d+1$ 形式 Lagrangian 密度 L で記述される d 次元面 Σ 上の系を考える．変分原理により Lagrangian は

$$\delta L(g)=d\theta_I(g)\delta g^I+\text{ equations of motion} \tag{6}$$

のように境界項と運動方程式で表される．ここで，$g(x)$ は時空の計量である．この θ からプレシンプレクティック形式 $\omega=\delta\theta$ を

$$W_{IJ}(g)=\int_\Sigma \omega_{IJ}(g)=\int_\Sigma\left[\partial_{g^I}\theta_J(g)-\partial_{g^J}\theta_I(g)\right] \tag{7}$$

と定義する．Σ での無限小一般座標変換を生成するようなベクトル場 ξ を考える．この一般座標変換は Σ での対称性になっているから，これを用いて Hamiltonian H_ξ を

$$\delta H_\xi=W_{IJ}(g)\delta g^I\mathcal{L}_\xi g^J \tag{8}$$

で定義することができる．以降，$\theta_I(g)\delta g^I=\theta(\delta g)$，$\quad W_{IJ}(g)\delta_1 g^I\wedge\delta_2 g^J=W\left(\delta_1 g,\delta_2 g\right)$ と書く．

Lie 微分の定義 $\mathcal{L}_\xi\theta=\xi\cdot\mathrm{d}\theta+\mathrm{d}(\xi\cdot\theta)$ と運動方程式から得られる $\mathrm{d}\theta=\delta L$ を用いると Hamiltonian の変分は

$$\delta H_\xi=\int_\Sigma\left[\delta\theta\left(\mathcal{L}_\xi g\right)-\xi\cdot\delta L-d(\xi\cdot\theta(\delta g))\right]=\int_\Sigma\delta J_\xi-\int_{\partial\Sigma}\xi\cdot\theta(\delta g) \tag{9}$$

Neother カレント $J_\xi=\theta\left(\mathcal{L}_\xi g\right)-\xi\cdot L$ と境界項で表現できる．また，$\partial\Sigma$ 上で，$\delta(\xi\cdot K)=\xi\cdot\theta(\delta g)$ となる d 形式 K を用いて H_ξ は，

$$H_\xi=\int_\Sigma J_\xi-\int_{\partial\Sigma}\xi\cdot K \tag{10}$$

と書くことができる．また J_ξ は閉形式なので，$J_\xi=\mathrm{d}Q_\xi$ とチャージを用いて表現できる．そのため Stokes の定理より H_ξ は，

$$H_\xi=\int_{\partial\Sigma}\left[Q_\xi-\xi\cdot K\right] \tag{11}$$

と Σ の境界での積分で表現できる．

ホログラフィック相対エントロピー

共形場理論の相対エントロピーは

$$S\left(\rho_B\|\rho_B^{\mathrm{vac}}\right)=\Delta\left\langle H_B\right\rangle-\Delta S_B \tag{12}$$

とモジュラー Hamiltonian の期待値とエンタングルメントエントロピーで表されていた．AdS/CFT 対応を用いて，そのそれぞれに対して重力理論側の対応物を考える．

モジュラー Hamiltonian $H_B(4)$ に現れるエネルギー運動量テンソルの期待値は漸近的 AdS 時空の Fefferman-Graham 計量を用いて，

$$\Delta \langle T_{\mu v}\rangle = \frac{d\ell^{d-3}}{16\pi G_N}\Gamma_{\mu v}(x,z=0), \quad ds^2 = \frac{\ell^2}{z^2}\left(\mathrm{d}z^2 + \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + z^d\Gamma_{\mu\nu}(z,x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu\right) \tag{13}$$

と求めることができる [6]．

エンタングルメントエントロピー S_B は，領域 B と境界を共有する AdS 時空内の極小曲面 (笠-高柳面またはその共変一般化された面)$\tilde{B}$ の面積に比例し，

$$\Delta S_B = \frac{1}{4G_N}\Delta\,\mathrm{Area}(\tilde{B}) \tag{14}$$

と表現できる [7][8]．ただし，G_N は $d+1$ 次元 AdS 時空上の重力理論の重力定数である．

以上で提示した関係式を用いると共形場理論の相対エントロピーは AdS/CFT 対応を用いて，

$$S\left(\rho_B||\rho_B^{\mathrm{vac}}\right) = \frac{d\ell^{d-3}}{16\pi G_N}\int_B \zeta_B^\mu \Gamma_{\mu\nu}(x,z=0)\epsilon^\nu - \frac{1}{4G_N}\Delta\,\mathrm{Area}(\widetilde{B}) \tag{15}$$

と重力理論の枠組みで記述することができる．さらに，(15) は適切な境界条件のもとで求めた

$$\begin{aligned}\xi_B = \frac{\pi}{R}&\left\{\left[R^2 - z^2 + (x-x_0)^2 + 2\left(u_v\left(x-x_0\right)^v\right)^2\right]u^\mu + \left[2u_v\left(x-x_0\right)^v\right]\left(x-x_0\right)^\mu\right\}\partial_\mu \\ &+ \frac{\pi}{R}\left\{u_v\left(x-x_0\right)^v z\right\}\partial_z\end{aligned} \tag{16}$$

を用いて定義された重力の準局所エネルギーを用いて表現することができる．具体的には，

$$\Delta\int_B \left[Q_\xi - \xi\cdot K\right] = \frac{d\ell^{d-3}}{16\pi G_N}\int_B \zeta_B^\mu \Gamma_{\mu\nu}(x,z=0)\epsilon^\nu, \quad \Delta\int_{\tilde{B}}\left[Q_\xi - \xi\cdot K\right] = \frac{1}{4G_N}\Delta\,\mathrm{Area}(\tilde{B}) \tag{17}$$

となることが示される．この関係式を用いると，以下のように共形場理論の相対エントロピーは重力の準局所エネルギーの差で表現でき，相対エントロピーの非負性から準局所エネルギーの不等式を導くことができる [2]．

$$S\left(\rho_B\|\rho_B^{(\mathrm{vac})}\right) = H_\xi(M) - H_\xi(\mathrm{AdS} \geq 0. \tag{18}$$

考察

ホログラフィック相対エントロピーについての不等式を，強結合のラージ N_c $\mathcal{N}=4$ 超 Yang-Mills 理論で記述される共形不変性を持ったプラズマのずり粘性についての不等式として記述できる可能性について議論する．

1 次元的に膨張する強結合のラージ N_c $\mathcal{N}=4$ 超 Yang-Mills 理論で記述される共形不変なプラズマに対応する重力側の計量は

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}\left\{-\frac{\left(1-\frac{\rho z^4}{3}\right)^2}{1+\frac{\rho z^4}{3}}d^2\tau + \left(1+\frac{\rho z^4}{3}\right)\left(\frac{1+\frac{\rho z^4}{3}}{1-\frac{\rho z^4}{3}}\right)^{-2\gamma}\tau^2 d^2 y + \left(1+\frac{\rho z^4}{3}\right)\left(\frac{1+\frac{\rho z^4}{3}}{1-\frac{\rho z^4}{3}}\right)^{\gamma} d^2 x_\perp\right\} + \frac{dz^2}{z^2}, \quad \gamma \equiv \frac{\eta_0}{\rho_0 \tau^{2/3}} \text{ and } \rho = \frac{\rho_0}{\tau^{4/3}} - \frac{2\eta_0}{\tau^2} \tag{19}$$

によって与えられる [9]．この計量はプラズマのずり粘性 η とエントロピー密度 s に関連したエネルギー密度 ρ によって記述されている．この計量に対して，(18) を適用することで η と s の不等式が得られるのではないかと考えられる．

(18) を共形場理論の次元を 4 とし，AdS 時空の長さスケールを 1，$4\pi G_N = 1$ としたものは，

$$\int_B d^{d-1}x \frac{\left(R^2 - r^2\right)}{R}\langle T_{00}(x)\rangle - \Delta \mathrm{Area}(\widetilde{B}) \geq 0 \tag{20}$$

と表される．(20) の左辺のエネルギー運動量テンソルの期待値と極小曲面の面積は，計量から直接求めることができるため，η と s が満たす不等式を得ることは原理的には可能である．

参考文献

[1] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113 [Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231]

[2] N. Lashkari, J. Lin, H. Ooguri, B. Stoica and M. Van Raamsdonk, “Gravitational positive energy theorems from information inequalities,” PTEP **2016** (2016) no.12, 12C109 [arXiv:1605.01075 [hep-th]].

[3] H. Casini, M. Huerta and R. C. Myers, “Towards a derivation of holographic entanglement entropy,” JHEP **1105** (2011) 036 [arXiv:1102.0440 [hep-th]].

[4] V. Iyer and R. M. Wald, “Some Properties of Noether Charge and a Proposal for Dynamical Black Hole Entropy” Phys. Rev. D 50 (1994) 846.

[5] R. M. Wald and A. Zoupas, “A General Definition of Conserved Quantitie” in General Relativity and Other Theories of Gravity,” Phys. Rev. D 61 (2000) 084027.

[6] S. de Haro, S. N. Solodukhin and K. Skenderis, “Holographic reconstruction of space-time and renormalization in the AdS / CFT correspondence,” Commun. Math. Phys. **217** (2001) 595 [hep-th/0002230].

[7] S. Ryu and T. Takayanagi, “Aspects of Holographic Entanglement Entropy,” JHEP **0608** (2006) 045 [hep-th/0605073].

[8] V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, “A Covariant holographic entanglement entropy proposal,” JHEP **0707** (2007) 062 [arXiv:0705.0016 [hep-th]].

[9] S. Nakamura and S. J. Sin, “A Holographic dual of hydrodynamics,” JHEP **0609** (2006) 020 [hep-th/0607123].