

AdS/CFT 対応を用いた量子異常に由来する不安定性の解析 — Analysis of Instability from Quantum Anomaly in AdS/CFT Correspondence —

博士課程前期課程 素粒子理論研究室

古川 晴貴

Furukawa Haruki

Introduction

AdS 時空におけるブラックホールの不安定性は AdS/CFT 対応 [1] によって対応する場の理論における相転移との関連が示唆されているため、近年盛んに研究されている。先行研究 [2] では量子異常によって空間方向に変調され不安定性が有限電荷密度系で生じる可能性についての重力双対を用いた解析がなされた。そこでは 5 次元の U(1) ゲージ場の Lagrangian として $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{IJ}F^{IJ} + \frac{\alpha}{3!}\epsilon^{JKLM}A_I F_{JK}F_{LM}$ が採用されていた。この系では Chern-Simons 項の存在が不安定性の発現の本質であり、電荷密度が十分大きくなると Chern-Simons 項の効果でブラックホール時空が不安定化する。

本研究では、重力理論側に Chern-Simons 項が露わに存在しない場合でも背景ゲージ場により疑似的に Chern-Simons 項を誘導することで [2] で見られた不安定性と類似の空間的に非一様な不安定性が現れる可能性について解析した。AdS/CFT 対応によるとこの系の解析はカイラル量子異常が存在する荷電粒子系に電場と磁場を印加した系に対応しており、この系に空間的に非一様な不安定性が発現する可能性を解析していることに対応している。解析の結果、本論文で用いたモデルでは系の不安定性が発現しないことが判明したが、それと同時に量子異常の効果が十分強い系では電場と磁場で誘導される不安定性が発現する可能性があることが示唆された。以下、本要旨では自然単位系 ($c = \hbar = k_B = 1$) を用いることにする。

D3-D7 model

本研究では D3-D7 モデルと呼ばれるモデルを解析に用いる。この系は超弦理論の枠内では $N(\gg 1)$ 枚の D3 ブレーンと 1 枚の D7 ブレーンによって構成されている。AdS/CFT 対応を適用すると D3 ブレーンは 5 次元 AdS ブラックホール (AdS₅ BH) と 5 次元球面 S⁵ の直積からなる時空に置き換わり、そこに D7 ブレーンが埋め込まれる。このプローブとして扱える D7 ブレーンに一定の外部電場と外部磁場が印加されている。以下、ストリングの張力と AdS 半径が 1 となるように対応する場の量子論の相互作用の大きさを選択する。

このとき、AdS₅ BH の時空の計量と S⁵ の計量はそれぞれ以下で与えられる。

$$\begin{cases} ds^2 &= \frac{du^2}{u^2} - \frac{1}{u^2} \frac{(1 - u^4/u_H^4)^2}{1 + u^4/u_H^4} dt^2 + \frac{1}{u^2} (1 + u^4/u_H^4) d\vec{x}^2, \\ d\Omega_5^2 &= d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2 + \cos^2 \theta d\Omega_3^2. \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 u は S⁵ の動径座標をあらわしており、 $u = 0$ が境界、 $u = u_H$ がホライズンになっている。この u_H を用いて Hawking 温度は $T = \sqrt{2}/(\pi u_H)$ で与えられる。そして、 $d\vec{x}^2$ は 3 次元 Euclid 空間の方向、 $d\Omega_d$ は d 次元単位球面の体積要素をあらわしている。D7 ブレーンは 3 次元単位球面 S³ に巻き付いていて、 $\psi = 0$ に位置するように時空の座標を選択する。

プローブ D7 ブレーンは以下の作用に従う。

$$S_{D7} \sim \int d^8 \xi \sqrt{-\det \Gamma_{mn}} := \int d^8 \xi \sqrt{-\det(g_{mn} + F_{mn})}. \quad (2)$$

この作用に $F_{mn} \rightarrow F_{mn} + f_{mn}$ としてゲージ場の揺らぎを加えると、作用 (2) を揺らぎの 2 次まで展開したものは以下で書ける [3].

$$S_{\text{eff}} \sim \int d^5 x \left(\frac{\sqrt{-s}}{4g_5^2} s^{mp} s^{nq} f_{mn} f_{pq} + \frac{1}{8} \epsilon^{mnpqr} f_{mn} f_{pq} Q_r \right), \quad (3a)$$

$$\text{where } s_{mn} = g_{mn} - (Fg^{-1}F)_{mn}, \quad g_5^2 = \frac{\sqrt{-s}}{\sqrt{-\Gamma}},$$

$$Q_l = -\frac{\sqrt{-\Gamma}}{8} \epsilon_{mnpql} \theta^{mn} \theta^{pq}, \quad \theta^{mn} = -s_a^m F^{an}. \quad (3b)$$

(3a) の第 2 項が Chern-Simons 項と同じ構造をしている (以後、これを疑似 Chren-Simons 項と呼ぶ.)。これを非ゼロにするためには、 $F_{23} = B_1$, $F_{41} \sim J_1(u)$ ($\Leftrightarrow E_1 \neq 0$) とすれば良い。すなわち、 x 方向に電場と磁場を印加すればよいということになる。

以上より、運動方程式を整理すると以下が得られる。

$$0 = \partial_N \left\{ \frac{\sqrt{-s}}{g_5^2} \partial_N f_{\pm}(u) \right\} \pm i(\partial_4 Q_0) \partial_1 f_{\pm}, \quad (4)$$

$$\text{where } f_{\pm} := f_2 \pm i f_3, f_k := \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} f^{ij}, \quad (i, j, k = 1 \sim 3, N = 0 \sim 4).$$

$f_{\pm} = \tilde{f}_{\pm}(u) e^{-i\omega t + i k_x x^1}$ において、 $\omega = 0$ を仮定すると、

$$0 = \partial_4 \left\{ \frac{\sqrt{-s}}{g_5^2} s^{44} s^{33} \partial_4 \tilde{f}_{\pm}(u) \right\} - \frac{\sqrt{-s}}{g_5^2} k_x^2 s^{11} s^{33} \tilde{f}_{\pm} \mp k_x (\partial_4 Q_0) \tilde{f}_{\pm}, \quad (5)$$

と書ける。従って、 \tilde{f}_{\pm} が規格化可能なモードとなるために必要な境界条件の下でこれを満たす k_x があれば、不安定領域の存在が示唆されるということになる。

Analysis

解析ではまず疑似 Chern-Simons 項が本来の値の α 倍の大きさであるとして、境界条件を満たすような解 $f_+(u)$ が得られる最も小さな α の値を調べてみる。この α の最小値が 1 以下になれば元の疑似 Chern-Simons 項で不安定性が発現すると言えるであろう。

具体的な境界条件として、ここでは $f_+(u)|_{u=u_*-\epsilon_1} = 1$ であるときに $f_+(u)|_{u=0+\epsilon_0} = 0$ となることを課す。ここで、 u_* は D7 プレーン上の開弦の計量のホライズンである。このような条件を満たす (E_x, B_x, k_x) を見つけることができれば不安定性が発現する波数 k_x が得られたことになる。但し、 ϵ_0, ϵ_1 は数値計算を安定にするために導入したカットオフである。本研究における解析では $(\epsilon_0, \epsilon_1) = (10^{-2}, 10^{-5})$ とした。

解析の結果、 α の最小値は $\alpha_{\min} = 3.134$ であるということが明らかとなった。すなわち、疑似 Chern-Simons 項は実際に存在している値に比べて 3.134 倍の大きさがないと不安定性が発現しないということが分かった (図 1)。

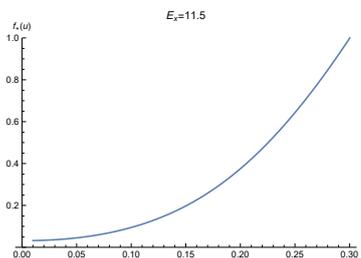
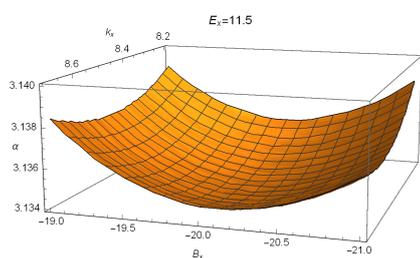


図 1 $E_x = 11.5$ としたときに適切な境界条件を満たすような解が存在する α の値
 図 2 $E_x = 11.5, B_x = -20.1, k_x = 8.51$ としたときの $f_+(u)$ の振る舞い

また、 $\alpha = 3.134, E_x = 11.5, B_x = -20.1, k_x = 8.51$ のときの $f_+(u)$ の振る舞いは図 2 の通りである。課した境界条件が満たされていることが確認できる。

本研究では不安定性が発現しない物理的な原因に関して場の量子論の側面から理解することはできなかったが、重力理論では電場 E_1 と磁場 B_1 を大きくしても $\partial_4 Q_0$ を大きくすることができないことが原因になっているということが示唆された。

すなわち、疑似 Chern-Simons 項の係数 $\partial_4 Q_0$ には上限が存在しており、本研究で扱った系では不安定性が発現するほど疑似 Chern-Simons 項が大きくならないため不安定性は発現しないという結論が得られた。

疑似 Chern-Simons 項は端的には $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}$ であらわされるため、例えば垂直方向にも磁場を加える

ことで、運動方程式の他の項の値を小さくして不安定性を発現させることができるかもしれない。

Conclusion

本研究では量子異常に由来する不安定性について理解するため、AdS/CFT 対応を用いた解析を行った。D3-D7 モデルを用いて x 軸方向に一定の電場と磁場が印加された系を用意し、ゲージ場の揺らぎを加えることで揺らぎの運動方程式を導出した。この運動方程式に解の仮設を与えて不安定性の解析を行った。

解析の結果、疑似 Chern-Simons 項の係数 $\partial_4 Q_0$ には上限値が存在しており、本研究の系では不安定性が発現するほど疑似 Chern-Simons 項が大きくなるため不安定性は発現しないということが明らかになった。しかし、これは重力理論側での問題であり、対応する場の量子論側でどのような状況になっているのか、どのような理由で不安定性が発現しなかったのかを具体的に理解することはできなかった。これらについては今後の課題としたい。

今後の展望としては、今回の系における場の量子論側での振る舞い理解すること、系のセットアップを少し変更して同様の不安定性解析を行うことなどが考えられる。例えば、垂直方向にも磁場を加えることで、運動方程式の疑似 Chern-Simons 項以外の項の値を相対的に小さくして不安定性を発現させることができるかもしれない。また、本研究では $\omega = 0$ と仮定して解析を行っており、一般に $\omega = \omega_{\text{Re}} + i\omega_{\text{Im}}$ と書ける場合における不安定性解析は行っていないため、そちらの方向で更なる調査を行うことも課題の 1 つであると言える。加えて、本論文で用いた D3-D7 モデルの他に、D4-D8- $\bar{\text{D}}8$ モデル（酒井・杉本モデル）でも同様の解析が可能である。酒井・杉本モデルで不安定性が発現するかという問題も大変興味深い。

Reference

- [1] J. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity”, *Adv. Theor. Math. Phys.* 2, **231** (1998), [arXiv:hep-th/9711200].
- [2] S. Nakamura, H. Ooguri and C. S. Park, “Gravity Dual of Spatially Modulated Phase,” [arXiv:hep-th/0911.0679v2].
- [3] K. Y. Kim, J. P. Shock and J. Tarrío, “The open string membrane paradigm with external electromagnetic fields,” [arXiv:hep-th/1103.4581v2].