非整数 Fokker-Planck 方程式と非整数微積分作用素

Fractional Fokker-Planck equations and fractional differintegrals

物理学専攻 矢萩　脩

Department of Physics. Shu Yahagi

1　非整数微積分作用素

非整数微積分作用素 [1], [2] とはその名のとおり, 通常の微積分で扱うような整数の微積分の補間として定義されたものである. これを ${}_aD_t^{\beta}f(t)$ と表記し, 実数 β が正のとき非整数微分作用素, β が負のとき非整数積分作用素を表す. この非整数微積分作用素にはいくつか定義があるが, ここでは以下の 2 つ

$$
{}_aD_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau, \quad (m < p < m+1), \tag{1.1}
$$

$$
{}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau, \quad (k-1 \leq p < k) \tag{1.2}
$$

$$
= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau, \quad (m \leq p < m+1), \tag{1.3}
$$

を非整数微積分作用素として定義する. ただし, $p \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$ とする. (1.1) 式を Grünwald-Letnikov 非整数微積分作用素 (G-L 型), (1.2) 式を Riemann-Liouville 非整数微積分作用素 (R-L 型) とよぶ. (1.3) 式より G-L 型と R-L 型の非整数微積分作用素は本質的に同じである.

2　Mittag-Leffler 関数

Mittag-Leffler 関数には 1 変数の Mittag-Leffler 関数 $E_a(z)$ と 2 変数の Mittag-Leffler 関数 $E_{a,b}(z)$ があり以下のように定義する [1], [3].

$$
E_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+1)}, \quad a \in \mathbb{C}, \quad E_{a,b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+b)}, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{C}. \tag{2.1}
$$

(2.1) 式より Mittag-Leffler 関数は指数関数 e^z を拡張させたものである.$E_a(z)$ は $E_{a,b}(z) = 1/\Gamma(b) + zE_{a,a+b}(z)$ と式変形できることから, $b = 1$ を代入すると以下のような 1 変数 Mittag-Leffler 関数と 2 変数 Mittag-Leffler 関数についての関係式が導かれる.

$$
E_a(z) = E_{a,1}(z) = \frac{1}{\Gamma(1)} + zE_{a,a+1}(z) = 1 + zE_{a,a+1}(z). \tag{2.2}
$$

また, 関数 $t^{ak+b-1}E_{a,b}^{(k)}(\pm\beta^a)$ のラプラス変換が以下で与えれる [3].

$$
\int_0^\infty e^{-st} t^{ak+b-1} E_{a,b}^{(k)}(\pm\beta t^a) dt = \frac{k! s^{a-b}}{(s^a \mp \beta)^{k+1}}, \quad \mathrm{Re}(s) > |\beta|^{1/a}, \quad E_{a,b}^{(k)}(y) \equiv \frac{d^k}{dy^k} E_{a,b}(y). \tag{2.3}
$$

3　拡散過程

拡散過程とは, その平均 2 乗変位が $\langle X(t)^2 \rangle \propto t^\gamma$ のように時間のべき乗で特徴づけられているものをいう. $0<\gamma<1, \gamma=1, \gamma>1$ をそれぞれ準拡散, 通常拡散 (ブラウン拡散), 超拡散とよぶ.

3.1　幾何ブラウン運動 $X(t)$, 準拡散幾何ブラウン運動 $X_\alpha(t)$, 複合拡散幾何ブラウン運動 $X_{\alpha,H}(t)$

幾何ブラウン運動 $X(t)$ とは次式で定義される拡散過程である.

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t), \quad X(0) = X_0, \quad \mu, \sigma \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

準拡散幾何ブラウン運動 $X_\alpha(t)$ とは次式で定義される拡散過程である [4].

$$X_\alpha(t) = X(S_\alpha(t)), \quad S_\alpha(t) = \inf\{\tau > 0 : U_\alpha(\tau) > t\}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{3.2}$$

$S_\alpha(t)$ を $1/\alpha$ 安定 subordinator とよび α 安定 Lévy 過程 $U_\alpha(\tau)$ で定義されている [6], [7]. また [5] を参考にし, $U_\alpha(\tau)$ と $S_\alpha(t)$ のサンプルパスを計算機シミュレーションにより作図した. $\tau_j = j\Delta\tau, (j = 1, 2, \ldots, M)$ となるような τ_j に対し $U(\tau_0) = 0$, $U(\tau_j) = U(\tau_{j-1}) + (\Delta\tau)^{1/\alpha}\xi_j$ とおく. 以下の図 1 は $\Delta\tau = 0.001, \alpha = 0.6, M = 10000$ として計算機シミュレーションを行ったときの $U_\alpha(\tau_j)$ サンプルパスである. ただし ξ_j は $V : (-\pi/2, \pi/2)$ での一様分布, W : 平均 1 の指数分布としたとき, 以下のように生成される乱数である.

$$\xi_j = [\cos(\pi\alpha/2)]^{-1/\alpha} \frac{\sin(\alpha(V + \pi/2))}{[\cos(V)]^{1/\alpha}} \times \left(\frac{\cos(V - \alpha(V + \pi/2))}{W} \right)^{(1-\alpha)/\alpha}, \tag{3.3}$$

さらに $t_i = i\Delta t, (i = 1, 2, \ldots, N)$ となるような t_i に対し $U(\tau_{j-1}) < t_i \leq U(\tau_j)$ となる τ_j を見つける. このとき, $S_\alpha(t)$ の定義より $S_\alpha(t_i) = \tau_j$ となる. ここで, Δt の個数 N は $U(\tau_{M-1}) < t_N \leq U(\tau_M)$ を満たすような自然数として定まる. 以下の図 2 は $\Delta t = 0.0001, N = 26762$ として計算機シミュレーションを行うことで作成した $S_\alpha(t_i)$ のサンプルパスである.

複合拡散幾何ブラウン運動 $X_{\alpha,H}(t)$ とは

$$X_{\alpha,H}(t) = X_H(S_\alpha(t)), \quad S_\alpha(t) = \inf\{\tau > 0 : U_\alpha(\tau) > t\}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < H < 1, \tag{3.4}$$

で定義される拡散過程である. ただし拡散過程 $X_H(\tau)$ は以下の確率微分方程式で定義される.

$$dX_H(\tau) = \mu X_H(\tau)d\tau + \sigma X_H(\tau)db_H(\tau), \quad b_H(\tau)\text{:変形非整数ブラウン運動}, \tag{3.5}$$

H はハースト指数とよばれる.

4　非整数 Fokker-Planck 方程式

複合拡散幾何ブラウン運動 $X_{\alpha,H}(t)$ を考える. このとき $S_\alpha(t)$ と $X_H(\tau)$ はそれぞれ独立であるとする. $X_{\alpha,H}(t)$ の確率密度関数を $p(x,t)$ とするとそれは以下のような非整数 Fokker-Planck 方程式を満たす [4].

$1/2 \leq H < 1$ の場合

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[-\mu \frac{\partial}{\partial x} x p(x,t) \right] + {}_0\mathbf{D}_t^{1-2H\alpha} \left[H\Gamma(2H)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) p(x,t) \right], \tag{4.1}$$

$0 < H \leq 1/2$ の場合

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha}\left[-\Gamma(3-2H)\Gamma(1+2H)\mu\frac{\partial}{\partial x}xp(x,t)\right] + {}_0\mathbf{D}_t^{1-2H\alpha}\left[H\Gamma(2H)\sigma^2\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2\right)p(x,t)\right], \tag{4.2}$$

(4.1), (4.2) 式の $p(x,t)$ はどちらも以下の条件を満たす.

$$p(x,0) = \delta(x). \tag{4.3}$$

4.1 非整数 Fokker-Planck 方程式の導出

表 1 にあるように, それぞれの確率過程に対して確率密度関数を設定する.

表 1　$X_{\alpha,H}(t), S_\alpha(t), X_H(\tau), U_\alpha(\tau)$ の確率密度関数.

過程	名称	密度関数
$X_{\alpha,H}(t)$	複合拡散幾何ブラウン運動	$p(x,t)$
$S_\alpha(t)$	$1/\alpha$ 安定 subordinator	$g(\tau,t)$
$X_H(\tau)$	異常拡散過程	$f(x,\tau)$
$U_\alpha(\tau)$	α 安定 Lévy 過程	$u(t,\tau)$

$M_n(x,\tau,\eta) := E[(X_H(\tau+\eta) - X_H(\tau))^n]|_{X_H(\tau)=x}$ を n 次のモーメントとする. Kramers-Moyal 前進型展開

$$f(x,\tau+\eta) - f(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n M_n(x,\tau,\eta)f(x,\tau), \tag{4.4}$$

において, $n \geq 3$ の項を無視したものが Fokker-Planck 方程式である. (3.5) 式から $M_n(x,\tau,\eta)$ を求め, 3 次以上の項を無視すると以下のような差分方程式を得る. ただし $\eta = \Delta\tau$ とした.

$$f(x,\tau+\Delta\tau) - f(x,\tau) = -\mu\frac{\partial}{\partial x}xf(x,\tau)\Delta\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2\right)f(x,\tau)(\Delta\tau)^{2H}. \tag{4.5}$$

(4.5) 式の両辺を $\Delta\tau$ で割り $\Delta\tau \to 0$ の極限をとった後, $t \leftrightarrow k$ のラプラス変換を行い $\hat{p}(x,k)$ に関する微分方程式

$$k\hat{p}(x,k) - p(x,0) = -\mu\frac{\partial}{\partial x}xk^{1-\alpha}\hat{p}(x,k) + H\Gamma(2H)\sigma^2\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2\right)k^{1-2H\alpha}\hat{p}(x,k), \tag{4.6}$$

を得る. (4.6) 式に対して逆ラプラス変換を行うことで (4.1) 式を導出することができる. 一方, (4.5) 式の両辺を $(\Delta\tau)^{2H}$ で割り, 同様のことを行うと (4.2) 式を導出することができる.

4.2 $H = 1/2$ における κ を固定したときの非整数 Fokker-Planck 方程式の解 $w_\kappa(x,t)$

$H = 1/2$ のとき (4.1), (4.2) 式は一致し

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha}\left[-\mu\frac{\partial}{\partial x}xp(x,t) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2\right)p(x,t)\right], \tag{4.7}$$

となる. ここで $p(x,t) = X(x)T(t)$ と変数分離を行う. それぞれの微分方程式に分けるため定数 κ を導入し, それぞれの微分方程式の解 $X_\kappa(x), T_\kappa(t)$ を求めた. それらの積をとることで $H = 1/2$ における κ を固定したときの非整数 Fokker-Planck 方程式の解 $w_\kappa(x,t)$ を以下のように求めることができた.

$$\begin{aligned} w_\kappa(x,t) &= X_\kappa(x)T_\kappa(t) \\ &= C_2(\kappa)x^{\frac{\mu-2\sigma^2-\sqrt{\mu^2-2\mu\sigma^2-2\kappa\sigma^2+\sigma^4}}{\sigma^2}} \times T(0,\kappa)E_\alpha(\kappa t^\alpha) \\ &\quad + C_3(\kappa)x^{\frac{\mu-2\sigma^2+\sqrt{\mu^2-2\mu\sigma^2-2\kappa\sigma^2+\sigma^4}}{\sigma^2}} \times T(0,\kappa)E_\alpha(\kappa t^\alpha), \quad C_2(\kappa), C_3(\kappa), T(0,\kappa)\text{:任意の } \kappa \text{ の関数}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

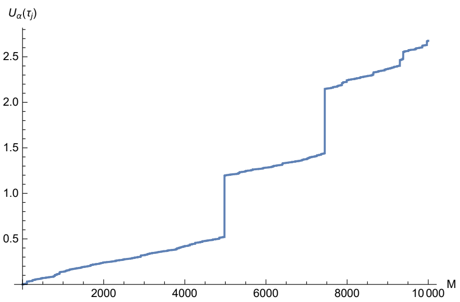

図 1　$\Delta\tau = 0.001, \alpha = 0.6, M = 10000$ のときの $U_\alpha(\tau_j)$ のサンプルパス.

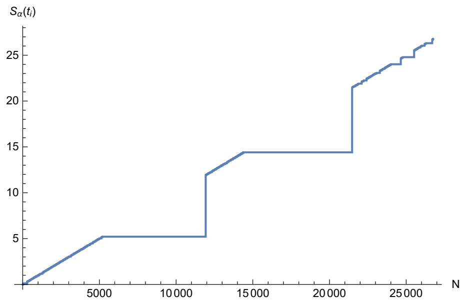

図 2　図 1 の $U_\alpha(\tau)$ に対して $\Delta t = 0.0001, N = 26762$ としたときの $S_\alpha(t_i)$ のサンプルパス.

参考文献

[1] Igor Podlubny: Fractional Differential Equations, Academic press(1999)

[2] A. V. Letnikov, Theory of differentiation of an arbitrary order, Mat. sb., vol. 3, 1868, pp. 1-68 (in Russian)

[3] Rudolf Gorenflo, Anatoly A. Kilbas, Francesco Mainardi, Sergei V. Rogosin :Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications, Springer

[4] Jin-Rong Liang, Jun Wang, Long-Jin Lu, Hui Gu, Wei-Yuan Qiu, Fu-Yao Ren: Fractional Fokker-Planck Equation and Black-Sholes Formula in Composite-Diffusive Regime. J,Stat.Phys. **146**,205-216(2012)

[5] Marcin Magdziartz, Aleksander Weron: Fractional Fokker-Planck dynamics: Stochastic representation and computer simulation. Phys. Rev. E **75**, 016708(2007)

[6] Steven P. Lalley: Lévy processes, stable processes, and subordinators, http://galton.uchicago.edu/~lalley/Courses/385/

[7] Aleksander Weron, Krzysztof Burnecki: Complete description of self-similar models driven be Lévy stable noise. Phy. Rev. E, **71**, 016113(2005)