

フリーラグランジュ有限要素法による粘性自由表面流れの数値解析

Numerical analysis of the viscous free surface flows by the free-Lagrange finite element method

精密工学専攻 16 号 城戸 創史
Soshi Kido

1. 序論

自由表面流れとは、液体と気体の接触面（または界面）である自由表面と呼ばれる境界に注目した流れのことであり、スロッシングやスラミングなどの現象と関連が深く、工学的分野において重要である。自由表面流れの数値解析において、自由表面を捕捉する手法はオイラー法とラグランジュ法に大別される。このうちラグランジュ法は、自由表面境界を計算領域の境界として直接的に表現できるため、境界の捕捉精度に優れている。しかし、有限要素法による解析にラグランジュ法を用いた場合、自由表面形状の変化に伴って要素が変形するため、要素の潰れや裏返りが生じ、計算精度の低下や計算の破綻を招く場合がある。これは、計算に用いる要素と節点の組み合わせに関する情報が固定されることに起因する。そこで齋藤ら⁽¹⁾は、局所的かつ一時的なメッシュを作りながら流れ計算を行うフリーラグランジュ有限要素法を提案し、自由表面の大変形を伴う現象の計算を行った。しかし、このときの計算はレイノルズ数が 200 と低かった。水を流体として扱う場合のレイノルズ数は数万～数百万程度となるが、従来の計算手法では高レイノルズ数での計算が行えず、計算精度の検証が行えなかった。そこで本研究では、高レイノルズ数流れの計算が行えるように本手法を改良し、計算精度の検証を行うことを目的とする。

2. 流れの支配方程式と離散化

2.1 流れの支配方程式

2次元における非圧縮性流体の流れの支配方程式は、ラグランジュ表記のナビエ・ストークス方程式

$$\frac{Du_i}{Dt} = \sigma_{ij,j} + f_i \quad (1)$$

と連続の方程式

$$u_{i,i} = 0 \quad (2)$$

である。ここに、 t は時間、 $x_i (i = 1, 2)$ は直交座標、 u_i は流速の x_i 成分、 f_i は外力の x_i 成分であり重力のみを考慮する。また、流体をニュートン流体と仮定すると応力テンソルの成分 σ_{ij} は、

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{1}{Re}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

で与えられる。ここに、 p は圧力、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。代表長さを L 、代表速さを U 、動粘性係数を ν とすると、レイノルズ数 Re は、 $Re = L\sqrt{gL}/\nu$ で定義

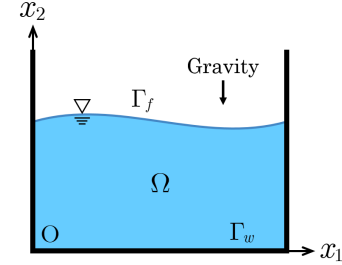


Fig. 1 Fluid region and the boundaries

される。Fig.1 のように x_2 軸を鉛直上向きにとるとき、外力は $f_1 = 0$ 、 $f_2 = -1/Fr^2$ で与えられる。ここに Fr はフルード数であり、 $Fr = U/\sqrt{gL}$ (g : 重力加速度) で定義される。ここでは $Fr = 1$ となる。Fig.1 に示すように流体領域 Ω の境界として、自由表面 Γ_f と固体壁 Γ_w を考えると、 Γ_f 上では、

$$p = p_0 \quad (4)$$

を課し、 Γ_w 上ではすべり条件

$$u_i n_i = \sigma_{ij} n_j t_i = 0 \quad (5)$$

を課す。ここに、 p_0 は大気圧、 n_i は境界上に立てた外向き単位法線ベクトルの x_i 成分、 t_i は単位接線ベクトルの x_i 成分である。

2.2 空間方向の離散化

空間方向の離散化には三角形要素による有限要素法を用いる。流速と圧力はともに x_i の 1 次多項式で近似し、計算の安定化のために PSPG 法⁽²⁾を用いる。PSPG 法を用いると、式 (1),(2) の弱形式は、

$$\int_{\Omega} \left[u_i^* \left(\frac{Du_i}{Dt} - f_i \right) + u_{i,j}^* \sigma_{ij} + q^* u_{i,j} \right] d\Omega + \int_{\Omega} q_{\text{PSPG}_i}^* \left(\frac{Du_i}{Dt} - \sigma_{ij,j} - f_i \right) d\Omega = 0 \quad (6)$$

となる。ここに $q_{\text{PSPG}_i}^*$ は PSPG 法によって付加される重み関数であり、

$$q_{\text{PSPG}_i}^* = \tau_{\text{PSPG}} q_i^* \quad (7)$$

で定義される。 τ_{PSPG} は要素ごとに定義されるパラメータであり、

$$\tau_{\text{PSPG}} = \left[\left(\frac{2\|\mathbf{u}^h\|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4}{h_e^2 Re} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (8)$$

で与えられる．ここに， Δt は時間増分， \mathbf{u}^h は要素重心における流速， h_e は要素サイズを示す．弱形式 (6) を空間方向に離散化すると，有限要素方程式

$$\mathbf{M}\mathbf{a} - \mathbf{H}\mathbf{p} + \mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{a} + \mathbf{H}^T \mathbf{u} + \mathbf{H}_\varepsilon \mathbf{p} = \mathbf{F}_\varepsilon \quad (10)$$

を得る．ここに， \mathbf{a} は加速度ベクトル， \mathbf{u} は流速ベクトル， \mathbf{p} は圧力ベクトル， \mathbf{F} は外力ベクトルを表し， \mathbf{M} は質量行列， \mathbf{H} は勾配行列， \mathbf{S} は拡散行列， \mathbf{H}^T は発散行列を表す．このとき，式 (9) は運動方程式 (1) に，式 (10) は連続の方程式 (2) にそれぞれ対応しており，添字 ε は PSPG 法に由来する項であることを意味する．

2.3 BTD 法の導入

本研究では高レイノルズ数流れの計算の安定化のために，BTD 法 (Balancing Tensor Diffusivity Method)⁽³⁾ を導入する．BTD 法は時間微分項を前進差分近似によって評価する際に Taylor 展開を 2 次の項まで考慮し，人工的な粘性項である BTD 項をナビエ・ストークス方程式に付加する方法である．BTD 項の弱形式は，

$$\int_{\Omega} u_{i,j}^* K_{jk} u_{i,k} d\Omega \quad (11)$$

と表される．ここに， K は

$$K_{ij} = u_i u_j \quad (12)$$

である．式 (11) を離散化して式 (9) に付加すると，有限要素方程式 (9) は，

$$\mathbf{M}\mathbf{a} - \mathbf{H}\mathbf{p} + \mathbf{S}\mathbf{u} + \mathbf{T} = \mathbf{F} \quad (13)$$

となる．ここに， \mathbf{T} は BTD 項である．

2.4 時間方向の離散化

時間軸を一定の長さ Δt の小区間に分割し，時刻 $t^n = n\Delta t$ と $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$ に挟まれた区間に注目する．物理量の時刻 t^n における値を知って，時刻 t^{n+1} における値を求めるものとして，式 (10)，(13) をそれぞれ次のように時間方向に離散化する．

$$\mathbf{M}^{n+1} \mathbf{a}^{n+1} - \mathbf{H}^{n+1} \mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{S}^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{F} \quad (14)$$

$$\mathbf{M}_\varepsilon^{n+1} \mathbf{a}^{n+1} + (\mathbf{H}^T)^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{H}_\varepsilon^{n+1} \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{F}_\varepsilon \quad (15)$$

このとき，各項の係数行列 \mathbf{M}^{n+1} ， \mathbf{H}^{n+1} ， \mathbf{S}^{n+1} ， \mathbf{T}^{n+1} は，時刻 t^{n+1} における節点座標 \mathbf{x}^{n+1} を中に含んでいることを意味する．時間積分法の一つであるニューマークの β 法によれば，速度と加速度の関係を

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t(1 - \theta)\mathbf{a}^n + \Delta t\theta\mathbf{a}^{n+1} \quad (16)$$

のように表すことができる．ここに， θ は時間積分の精度を決めるパラメータであり，ここでは $\theta = 1/2$ とする．この関係を用いて，式 (14)，(15) より \mathbf{u}^{n+1} を消去し，さらに加速度増分 $\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}^{n+1} - \mathbf{a}^n$ と圧力増分 $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n$ を用いて整理すると，

$$\mathbf{K}^{n+1} \Delta \mathbf{a} - \mathbf{H}^{n+1} \Delta \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (17)$$

$$\mathbf{K}_\varepsilon^{n+1} \Delta \mathbf{a} + \mathbf{H}_\varepsilon^{n+1} \Delta \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{F}}_\varepsilon \quad (18)$$

を得る．ここに， $\Delta \mathbf{a}$ の係数行列は，それぞれ $\mathbf{K}^{n+1} = \mathbf{M}^{n+1} + \Delta t\theta\mathbf{S}^{n+1}$ ， $\mathbf{K}_\varepsilon^{n+1} = \mathbf{M}_\varepsilon^{n+1} + \Delta t\theta(\mathbf{H}^T)^{n+1}$ である．式 (17)，(18) における各項の係数行列は，依然として未知量 \mathbf{x}^{n+1} の関数であるため，非線形代数方程式 (17)，(18) を解くために次に述べる反復解法を用いる．

1. \mathbf{x}^{n+1} ， $\Delta \mathbf{a}$ ， $\Delta \mathbf{p}$ の初期値を設定する．
2. 式 (17) を $\Delta \mathbf{a}$ について解き，その結果を式 (18) に代入すると， $\Delta \mathbf{p}$ に関する連立 1 次代数方程式を得る．これを解いて $\Delta \mathbf{p}$ を求める．この求解には共役勾配法を用いる．
3. 手順 2 で得られた $\Delta \mathbf{p}$ を式 (17) に代入して $\Delta \mathbf{a}$ を求める．
4. ニューマークの β 法で用いられる関係式

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{u}^n + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \mathbf{a}^n + \beta \mathbf{a}^{n+1} \right] \quad (19)$$

によって，節点座標を更新する．ここに， β も時間積分の精度を決めるパラメータで，ここでは $\beta = 1/4$ とする．

5. 手順 2～4 を反復する．反復回数は 4 回とする．

3. 計算手法

3.1 フリーラグランジュ有限要素法の概要

本手法の計算手順は次のとおりである．

1. ある節点に注目し，その周辺にローカルな有限要素メッシュを生成する．
2. ローカルメッシュを用いて式 (17)，(18) に対応する要素方程式を組み立てる．
3. 要素方程式を重ね合わせ，注目した節点の方程式のみを全体方程式 (17)，(18) に組み込む．
4. 式 (17)，(18) を解き，すべての節点の加速度，速度，座標，圧力を更新する．
5. 節点の追加，再配置の操作を行う．
6. 時間を Δt だけ進めて，1 の過程から繰り返す．

3.2 ローカルメッシュの生成

フリーラグランジュ有限要素法では，流体領域に節点 (以後，これを流体節点と呼ぶ) を分布させておき，注目する流体節点 P のまわりに Fig.2 に示すようなローカルメッシュを生成する．このメッシュは流体節点 P に最も近い

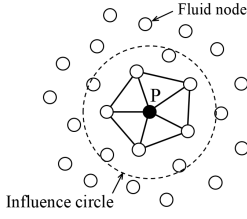


Fig. 2 Local mesh of finite elements around P

節点群を用いて生成され、流体節点の移動の都度生成される。なお、このローカルメッシュの生成には、歪みの小さい三角形の生成に適したデローニの三角分割⁽⁴⁾を用いる。

3.3 節点分布密度の調整

3.3.1 節点の再配置

節点の移動や追加、削除によって節点分布が急激に変化したり、要素が歪むことで計算精度が低下することがある。そこで、反復回数 k において

$$\mathbf{x}_P^{n+1} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{x}_{ge}^L A_e / \sum_{e=1}^{ne} A_e \quad (20)$$

$$\max(\|\mathbf{x}_P^{n+1,(k+1)} - \mathbf{x}_P^{n+1,(k)}\|) < \varepsilon \quad (21)$$

を満たすまで反復計算を行い節点分布を均一化する。ここに、 ne は節点 P を中心節点としたローカルメッシュを構成する要素の個数、 \mathbf{x}_{ge}^L は要素の重心の位置ベクトル、 A_e は要素面積、 ε は微小量移動量であり、 $\varepsilon = 10^{-10}$ とする。また、再配置後の節点 P における物理量 ϕ の値 ϕ'_P は次式で計算する。

$$\phi'_P = \phi_P + (\mathbf{x}_P^{n+1} - \mathbf{x}_P^L) \cdot \nabla \phi_P \quad (22)$$

ここに、 ϕ_P はそれぞれ再配置前の P における ϕ を表し、 \mathbf{x}_P^L は再配置前の P の位置ベクトルを表す。

3.3.2 節点の追加

流体で激しい運動が行われる部分では、節点の再配置だけでは節点分布密度が十分均一にならない場合がある。そこで、節点分布密度に応じて要素の重心または最大辺の中点に節点を一つ追加する。まず

$$\bar{A} = \frac{1}{NE} \sum_{e=1}^{NE} A_e \quad (23)$$

で平均要素面積 \bar{A} を求める。ここに、 NE は流体領域のローカルメッシュの総要素数である。この \bar{A} を用いて

$$a_1 = A_e / \bar{A} \quad (24)$$

を求め、 $a_1 > 2.0$ を満たす要素を節点追加の対象とする。さらに、要素の最大辺を底辺としたときの底辺の長さを b 、高さを h として、

$$a_2 = h/b \quad (25)$$

を求め、 $a_2 \leq 0.3$ を満たす要素は最大辺の中点に、満たさない要素は要素重心にそれぞれ節点を 1 つ追加する。

4. 液柱崩壊問題の数値計算

4.1 液体変位の実験値との比較

液柱崩壊問題を扱い、運動する液体の変位について実験値や他の計算手法の結果との定量的な比較を行う。液柱崩壊問題とは、長方形の液柱が仕切り板によって支えられている状態から、瞬間的に仕切り板を取り外した時に重力の作用によって液柱が崩壊するというものである。計算モデルを Fig.3 に示す。静止液面の横幅を $L = 0.057\text{m}$ とする。レイノルズ数、フルード数はそれぞれ $Re = 3.27 \times 10^4$ 、 $Fr = 1.0$ であり、時間増分は $\Delta t = 10^{-3}$ である。 $t = 0$ において液体領域に配置される節点は 5151 個、壁節点は 701 個である。

Fig.4 に液柱の先端位置の時間変化を、Fig.5 に液柱の高さの時間変化をそれぞれ示す。横軸は無次元時間、縦軸は無次元距離である。図中の○印は本計算結果、×印は越塚⁽⁵⁾の MPS 法による計算結果、実線は Martin ら⁽⁶⁾の実験値をそれぞれ表す。図より、変位は実験値と同じ変化の傾向であり、同じラグランジュ法である MPS 法とほぼ一致している。このことから、BTD 法による高レイノルズ数流れの計算ができているといえる。

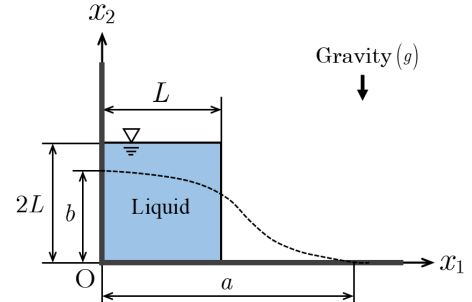


Fig. 3 Computational model for comparison of the displacement

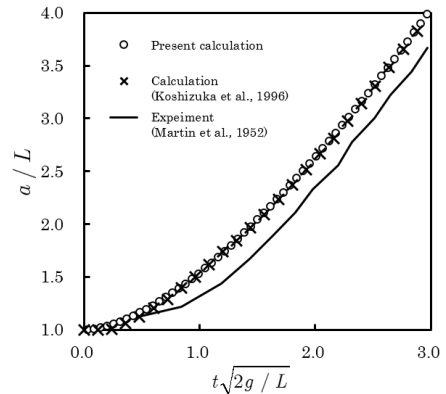


Fig. 4 Time history of the tip of the liquid column

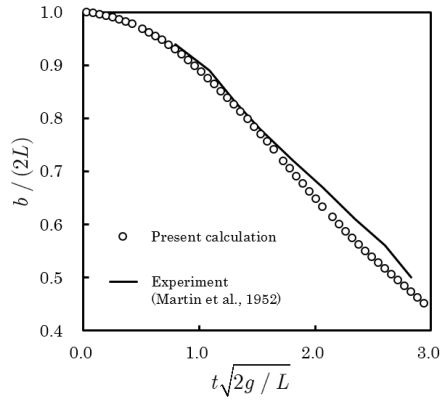


Fig. 5 Time history of the height of the liquid column

4.2 圧力の実験値との比較

液柱崩壊問題で、壁面の衝撃圧について Lobovsky⁽⁷⁾ の実験値との定量的な比較を行う。計算モデルを Fig.6 に示す。静止液面の横幅を $L = 0.6\text{m}$ とする。レイノルズ数、フルード数はそれぞれ $Re = 1.12 \times 10^6$, $Fr = 1.0$ であり、時間増分は $\Delta t = 10^{-3}$ である。 $t = 0$ において液体領域に配置される節点は 1681 個、壁節点は 348 個である。

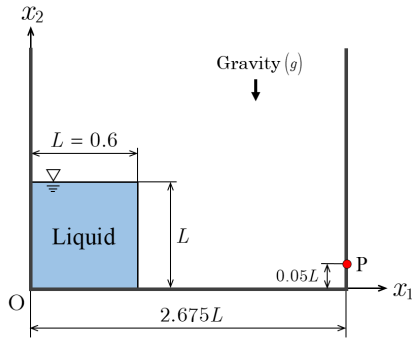


Fig. 6 Computational model for comparison of the pressure

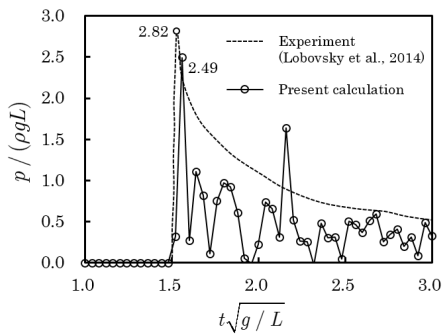


Fig. 7 Time history of the pressure at P

Fig.7 に点 P での圧力の時間変化を示す。横軸は無次元時間、縦軸は無次元圧力である。水が右固体壁に衝突したときの衝突圧を得ることができている。また、圧力の振動は生じているが、全体としては実験値のように圧力が減衰する傾向を確認できる。以上から、BTD 法が機能し高レイノルズ数の計算が行えるようになったといえる。

5. 結論

高レイノルズ数流れの計算のために BTD 法に基づく人工的な粘性項を導入し、実験と同じ高レイノルズ数の条件での解析が行えるフリーラグランジュ有限要素法を構築した。構築した手法で液柱崩壊問題を計算し、液体変位と圧力についてそれぞれ実験値や他の計算手法との比較による定量的な精度検証を行い、良好な結果を得ることができた。

参考文献

- (1) 斎藤敦史, 村上拓, 中山司, “有限要素法をベースとしたフリーラグランジュ法による粘性自由表面流れの数値解析”, 日本流体力学会誌『ながれ』, **28**(2009), 399-408.
- (2) T. E. Tezduyar, Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advances in Applied Mechanics*, **28**(1992), 1-44.
- (3) P. M. Gresho, S. T. Chan, R. L. Lee, C. D. Upson, A modified finite element method for the solving the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **4**(1984), 557-598.
- (4) S. W. Sloan, A fast algorithm for constructing Delaunay triangulations in the plane, *Advances in Engineering Software*, **9**(1987), 34-55.
- (5) S. Koshizuka, Y. Oka, Moving-Particle Semi-Implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, **123**(1996), 421-434.
- (6) J. C. Martin, W. J. Moyce, An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane, *Philosophical Transactions of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, **244**(1952), 312-324.
- (7) L. Lobovsky, E. Botia-Vera, F. Castellana, J. Mas-Soler, A. Souto-Iglesias, Experimental investigation of dynamic pressure loads during dam break, *Journal of Fluids and Structures*, **48**(2014), 407-434.