

境界要素法と拡張個別要素法による 浮き屋根式タンクのスロッシング解析

Numerical analysis of liquid sloshing in a floating-roof tank
by the boundary element and the extended distinct element methods

精密工学専攻 26号 神野 皓平
Kouhei Jinno

1. 序論

スロッシングとは、液体を入れた容器が振動した場合に液体の表面が大きくうねる現象であり、特に、貯蔵している液体を覆う屋根が内溶液の上に浮いている浮き屋根式タンクは、スロッシングに伴い、浮き屋根も揺り動かされるため浮き屋根の沈降や浮き屋根の接触による貯蔵液への引火などの災害が起きている⁽¹⁾。こういった災害を未然に防ぐための解析が求められている。浮き屋根式タンクのスロッシング現象は、タンク内の流体と浮き屋根である物体が、お互いに作用を及ぼしあいながら起こる問題である。

そこで、まず流体領域の離散化手法として、境界要素法⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾を用いる。スロッシングを含めて一般に、自由表面の流れを有する問題の流れの主たる未知量は、境界値である場合が多い。境界要素法は、最終的に境界積分方程式を解く問題になり、境界だけを対象に計算を行い、解を求めることができる。また、内部の領域の計算を必要としないことから、有限要素法に比べ、計算コストが少ないという利点がある。

次に、浮き屋根部分の弾性体の表現に、粒子法のひとつである拡張個別要素法⁽⁵⁾⁽⁶⁾を用いる。この手法は、個別要素法に要素同士の間隙に存在する物質の効果を間隙ばねを導入することで、解析対象物の連続体から非連続体にした一連の挙動の解析を可能にした方法である。この方法は、有限要素法に比べ、非連続体解析法を母体としているため、大変形に有効である。また、並列化が簡易的であり大規模計算に向いている。本研究では、この2つの手法を用い、浮き屋根式タンクのスロッシングの実用的かつ有効的な解析手法を構築することを目的とする。

2. 液体の運動解析

2.1 基礎方程式

Fig.1に示すような浮き屋根式タンクのスロッシング問題を考える。貯槽は剛体を仮定し、液面は浮き屋根で覆われており、浮き屋根と液面は常に接触しているものと仮定する。Fig.1において、浮き屋根である物体と液面との境界を Γ_f とし、壁境界を Γ_w とする。ここで対象とする流体は非圧縮性の完全流体とし、その運動を非回転とすると支配方程式と境界条件は以下のように与えられる。

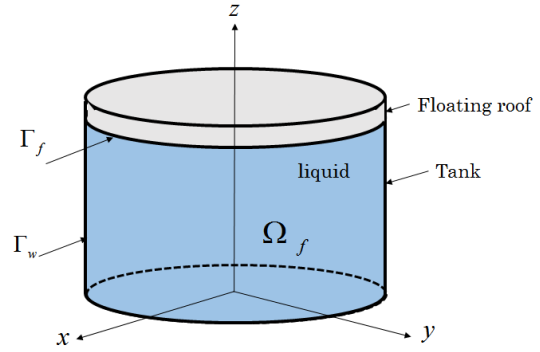


Fig. 1 Computational model

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{in } \Omega_f \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = u n_x + v n_y + w n_z \quad \text{on } \Gamma_f \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_w \quad (3)$$

$$\phi = 0 \quad \text{on } A \quad (4)$$

ここに t は時間、 u, v, w は近傍の弾性体粒子の速度をもとに決定した境界要素節点の速度であり、 $\partial/\partial n$ は、境界上の外向き法線 n の方向への微分であり、 n_x, n_y, n_z はそれぞれ法線の x 軸、 y 軸、 z 軸に対する方向余弦を表す。また境界積分方程式によって、未知量を定めるために、ノイマン条件のみならず、ディリクレ条件(4)を左の下の任意節点 A に与える。

この手法では境界 Γ_f 上を流体粒子の集まりと考える。そして境界 Γ_f の時々刻々の変化を、粒子のラグランジュ的な移動と考える。このときの新しい時刻での流体粒子の座標は、ラグランジュ微係数を用いたテイラー展開式で表すことができる。

今、時刻 t と $t + \Delta t$ で考える。時刻 t で (ξ, η, ζ) の位置にあった流体粒子が時刻 $t + \Delta t$ には (ξ', η', ζ') に移動したとする。このとき ξ', η', ζ' は (ξ, η, t) を中心としてテイラー級数に展開することができる。すなわちこのテイラー級数を n 階微分の項で打ち切ると次のように表すことができる。

$$\xi' \approx \xi + \Delta t \frac{D\xi}{Dt} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{D^2\xi}{Dt^2} + \dots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} \frac{D^n\xi}{Dt^n} \quad (5)$$

$$\eta' \approx \eta + \Delta t \frac{D\eta}{Dt} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{D^2\eta}{Dt^2} + \dots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} \frac{D^n\eta}{Dt^n} \quad (6)$$

$$\zeta' \approx \zeta + \Delta t \frac{D\zeta}{Dt} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{D^2\zeta}{Dt^2} + \dots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} \frac{D^n\zeta}{Dt^n} \quad (7)$$

ここに ξ, η, ζ はそれぞれ液面 Γ_f 上の節点のラグランジュ座標である。タンクと液体は初期状態で静止状態とし、初期条件は次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \phi = \zeta = 0 \\ \eta, \xi \text{ specified} \end{array} \right\} \text{ at } t = 0 \quad (8)$$

2.2 境界要素法による基礎方程式の離散化

ラプラス方程式 (1) を境界条件 (2),(3) のもとで境界積分方程式によって解く事を考える。式 (1) の境界積分方程式は次式で与えられる。

$$\alpha_P \phi_P + \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma = 0 \quad (9)$$

ここに $\Gamma = \Gamma_f \cup \Gamma_w$ である。ただし α_P は境界形状に依存する形状係数を表す。

$$r = \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2} \quad (10)$$

ここで簡単のため $\partial\phi/\partial n = q$ と置く。いま三角形一次要素を用いると ϕ と q を次のように表すことができる。

$$\phi = \sum_{j=1}^3 N_j(\xi, \eta) \phi_{ji} \quad (11)$$

$$q = \sum_{j=1}^3 N_j(\xi, \eta) q_{ji} \quad (12)$$

選点法を用いて式 (9) を離散化すると、

$$\alpha_{P_i} \phi_{P_i} - \sum_{j=1}^N (G_{ij}^1 q_{j1} + G_{ij}^2 q_{j2} + G_{ij}^3 q_{j3}) + \sum_{j=1}^N (H_{ij}^1 \phi_{j1} + H_{ij}^2 \phi_{j2} + H_{ij}^3 \phi_{j3}) = 0 \quad (13)$$

となる。ここに、添え字 P_i は i 番目の節点 p_i における値を意味し、また添え字 j は j 番目の要素 e_j における値、添え字 j_1, j_2, j_3 は要素 e_j の 3 節点における値を意味する。また、影響係数ベクトル G_{ij}^k, H_{ij}^k は次式で定義される。

$$G_{ij}^k = \int_{e_j} N_k \frac{1}{r} d\Gamma \quad (k = 1, 2, 3) \quad (14)$$

$$H_{ij}^k = \int_{e_j} N_k \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma \quad (k = 1, 2, 3) \quad (15)$$

式 (13) に境界条件 (2),(3) を導入すれば、解くべき連立一次代数方程式が導かれ、境界上の未知量を求めることができる。

3. 弾性体の解析

拡張個別要素法では粒子を剛体として扱い、粒子間の引力や斥力、摩擦力をばねやダッシュポット、スライダーで表現する。ばねには間隙ばねと要素ばねの 2 種類がある。Fig.2 に示すように間隙ばねは粒子間の間隙に存在する物質の効果を表し、粒子同士が接触しているか、あるいはある程度近くに存在する場合に設定し、粒子間に間隙がある場合でも力の伝達を行う。要素ばねは粒子自身の力学的作用を表したものであり、粒子同士が接触時のみ力が作用する。各要素について、接触する全ての要素ばねからの抗力の合力と、間隙ばねによる抗力の合力が作用する。またモデルに外力を与える場合、各要素に直接加速度を作用させることによって表現する。この各々の要素に作用する各成分から、時刻における加速度をニュートンの第 2 法則より以下のように計算する。

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{\mathbf{x}}_i^t = \mathbf{F}_i^t / m_i \\ \ddot{\phi}_i^t = \mathbf{M}_i^t / I_i \end{array} \right\} \quad (16)$$

ここで \mathbf{F}_i は要素 I に働く合力のベクトル、また \mathbf{M}_i は要素 I に働く合モーメント、 \mathbf{x}_i, ϕ_i は要素 I の x, y, z のそれぞれの位置ベクトルと回転角ベクトルである。 m_i と I_i は要素 I の質量と慣性モーメントであり、密度を ρ_i とすると $m_i = 4\rho_i\pi r^3/3, I_i = 8\rho_i\pi r^5/15$ である。要素 I の速度は Δt に関して式 (16) で求めた加速度を数値積分することにより次式のように求める。

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}_i^t = \dot{\mathbf{x}}_i^{t-\Delta t} + \ddot{\mathbf{x}}_i^t \Delta t \\ \dot{\phi}_i^t = \dot{\phi}_i^{t-\Delta t} + \ddot{\phi}_i^t \Delta t \end{array} \right\} \quad (17)$$

式 (17) をさらに微小時間 Δt で台形則を用いて積分す

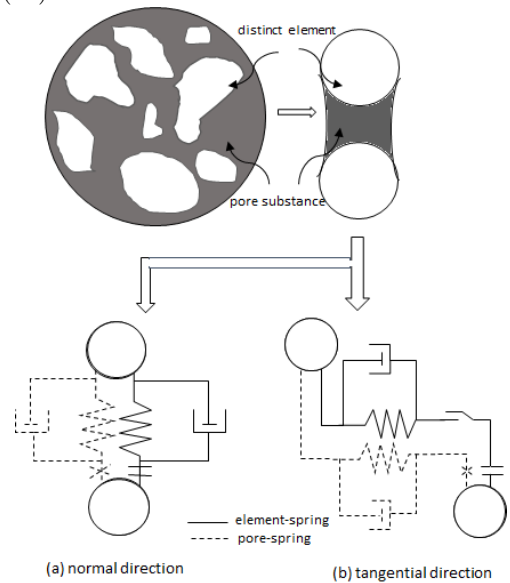


Fig. 2 Pore-Spring and Element-spring

ると次式のように変位増分が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_i^t &= (1/2)(\dot{\mathbf{x}}_i^t + \dot{\mathbf{x}}_i^{t-\Delta t})\Delta t \\ \Delta \phi_i^t &= (1/2)(\dot{\phi}_i^t + \dot{\phi}_i^{t-\Delta t})\Delta t \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

これにより, 時刻 t における粒子の座標と回転角は

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_i^t &= \mathbf{x}_i^{t-\Delta t} + \Delta \mathbf{x}_i^t \\ \phi_i^t &= \phi_i^{t-\Delta t} + \Delta \phi_i^t \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

で求められる.

これらの時刻 t での変位を用いて, 同様に $t + \Delta t$ における要素に作用する力, 加速度, 速度, 変位が計算でき, Δt ごとの解析を繰り返し進めることができる.

4. 計算手順

以下に本計算の全体の流れを示す.

- 1 拡張個別要素法により, 運動方程式 (16) を Δt に関して数値積分し, 弾性体粒子の速度 U_i, V_i, W_i を求める.
- 2 液面と弾性体粒子との境界 Γ_f に境界条件 (2) として与える. またこのときの u, v, w は Fig.3 の様に境界要素節点に対し, 近傍の弾性体粒子の速度を補間する. 補間法としてマーカー粒子の補間法⁽⁷⁾を用いる.
- 3 未知量である境界 Γ_f 上の ϕ の値を境界要素法を用いて求める.
- 4 この ϕ の値より境界 Γ_f 上の節点の圧力値を圧力方程式 (20) よりそれぞれの節点について求める.

$$\frac{P}{\rho} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - \mu\phi - \frac{D\phi}{Dt} - g\eta - a_x(t)\xi \quad (20)$$

ここで ρ は水の密度, u, v, w は Γ_f 上の境界節点の速度, g は重力加速度, μ は減衰係数であり, この項を含めることによって, 流体の粘性を考慮して解析することと等価となる. $a_x(t)$ は加振加速度である.

- 5 弾性体粒子に求めた圧力値 p_i を与える. またこのときの圧力値 p_i はそれぞれの三角形要素内の弾性体粒子 i に対して, Fig.4 のように境界要素の三節点の圧力を補間し次式のように与える.

$$p_i = \frac{\Delta_1}{\Delta} p_1 + \frac{\Delta_2}{\Delta} p_2 + \frac{\Delta_3}{\Delta} p_3 \quad (21)$$

ただし $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ である.

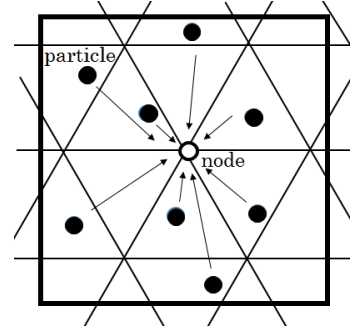


Fig. 3 Velocity interpolation

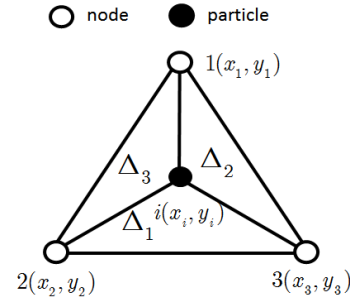


Fig. 4 Pressure interpolation

6. 時間を Δt 進め手順 1 より繰り返す.

5. 数値計算

5.1 理論解との比較

境界要素法の計算精度を確認するため, 円筒形貯槽内のスロッシング現象の線形理論の厳密解⁽⁸⁾との比較計算を行った. 円筒形貯槽の右端と左端の波高の線形理論解と本手法による計算結果の比較を Fig.5 に示す. このときの円筒形タンクの半径は $0.5m$, 水深 $H = 0.6m$ として加振加速度 $a(t)$ は $a(t) = 0.00515g \sin(2\pi \cdot 0.875t)$ とした. 微小加振であるため計算結果は厳密解と一致した線形な挙動を示している.

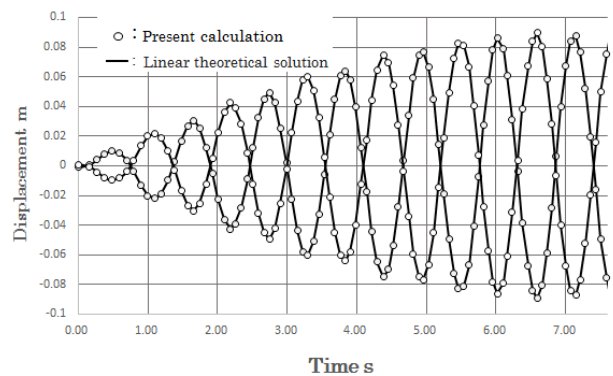


Fig. 5 Comparison with linear theoretical solution

5.2 計算モデル

浮き屋根をもつ3次元円筒容器のスロッシングの計算モデルを Fig.6 に示す. 浮き屋根は弾性体粒子の集合体として表現し, 弾性体粒子1つの密度を 950 kg/m^3 とし半径を 0.02 m とする. このとき浮き屋根を表現する弾性体粒子は三層になっており, 浮き屋根の厚さ h は 0.12 m 総粒子数は 1398 である. また, タンクは剛体を仮定し, タンクの横幅 W は 1 m とし, 初期状態のタンクの水深 H を 0.5 m とする. 用いる境界要素数は 376, 節点数は 620, 時間増分 Δt は 10^{-5} s とする.

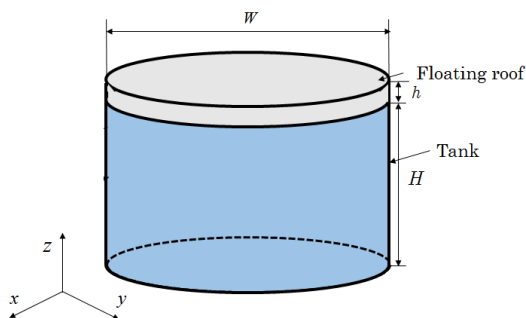


Fig. 6 A cylindrical tank and floating roof

5.3 計算結果

Fig.7 に $t = 0.0 \text{ s}$, $t = 0.5 \text{ s}$, $t = 1.0 \text{ s}$, $t = 1.5 \text{ s}$ 時の xz 平面での浮き屋根式をもつ3次元円筒容器のスロッシングのシミュレーション結果を Fig.8 に Γ_f 右端部の弾性体粒子の変位の結果を示す. 液面は中心から見てほぼ点対称となっており液体からの加振力が正確に受け渡されている様子が観測できる. また弾性体粒子の変位が液面に沿って変化しており, 液体と弾性体の連成計算ができています.

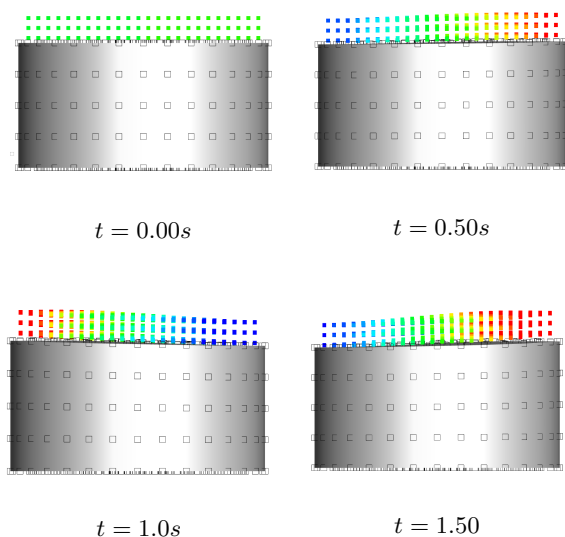


Fig. 7 Profiles of liquid surface at different time instants

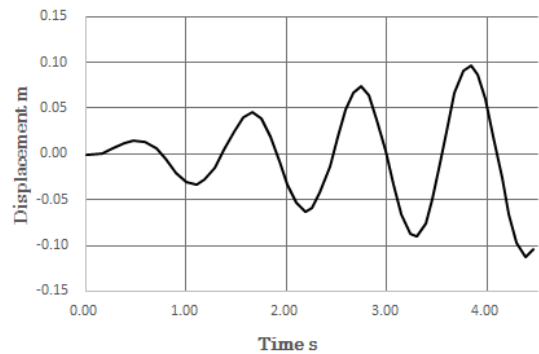


Fig. 8 Displacement of EDEM

6. 終わりに

境界要素法と拡張個別要素法を用いて, 浮き屋根式タンクのスロッシングを表現することができた. 境界要素法では線形理論解と解析解の一致を確認し, 数値解法としての有効性を示した. 2次元のモデルでは浮き屋根にシングルデッキモデルとダブルデッキモデルを用いそのときの変位から定性的な一致を確認した. そして2次元モデルから3次元モデルへの拡張を行い, 浮き屋根をもつ3次元円筒容器のスロッシング現象を表現した. また, より現実のモデルに近づくために, 壁境界にも粒子を与え, 剛体壁を表現し, 減衰をさせるためのバッファを取り付け, 実験値との変位を比較, 検証し定量的評価を行うのが今後の課題である.

参考文献

- (1) 三浦正博, 地震時のスロッシングによる浮き屋根式タンクの被災メカニズムと遮閉板を用いたスロッシング抑制装置の設計手法に関する研究, 学位論文, 京都大学, (2010)
- (2) 登坂宣好, 中山司, 境界要素法の基礎, 日科技連出版社, (1987)
- (3) Tukasa Nakayama, A computational method for simulating transient motions of an incompressible inviscid fluid with a free surface, International journal for numerical methods in fluids, vol.10, (1990)
- (4) 田中宏明, 3次元軸対称容器内の大振幅スロッシングの数値解析に関する研究, 修士論文, 中央大学, (1990)
- (5) 落合美鈴, 流れの中に置かれた弾性体の流体力による変形の数値解析, 卒業論文, 中央大学, (2013)
- (6) 伯野元彦, 破壊のシミュレーション, 森北出版, (1997)
- (7) W. J. Rider, D. B. Kothe, A marker particle method for Interface Tracking, May 30, (1995)
- (8) 曾我部 潔, 柴田 碧: 円筒形液体貯槽の液面動揺の応答 第一報 基礎式と正弦波解, 生産研究, 26 巻, 3 号, pp.152-154, (1974)