部分的に媒質を装荷した半無限平行平板導波管による回折に関する研究

Diffraction by a Semi-infinite Parallel-plate Waveguide with Partial Material Loading

電気電子情報通信工学専攻　何 柯文
Kewen HE

1. はじめに

平行平板導波管による散乱・回析に関する解析は，標的のレーダ断面積（Radar Cross Section）の予測・低減において基本的かつ重要な課題である．これまで数多くの研究者により，平行平板導波管に関する散乱・回折問題が解析されてきた．しかし，これらの手法の多くは周波数帯域に制限があり，任意の周波数領域で有効となる解析が求められている．Weinstein [1]は任意の開口幅の平行平板導波管の回折問題に Wiener-Hopf 法[2]が適用できることを示した. 小林研究室では，平板状終端を持つ有限長平行平板導波管による平面波の回折問題を Wiener-Hopf 法を用いて解析されている[3]-[6]．文献[5][6]において，杉林らは誘電体・フェライト媒質装荷開口端平行平板導波管による回折問題を Wiener-Hopf 法を用いて解析し，導波管の開口幅が数波長程度までであれば有効な解を得た．

本論文では，杉林らの研究[5][6]の同一の部分的に媒質を装荷した半無限平行平板導波管による回折問題を取り上げ，E 波と H 波入射について Winer-Hopf 法により厳密に解析する．Wiener-Hopf 方程式の解に現れる無限級数の係数に端点条件を厳密に適用することによって，任意の導波管開口幅に関し一様に有効となる解を求める[7][8]．なお，時間因子は $e^{-i\omega t}$ とし，全て記述から省略する．なお，紙面の都合上，解析の詳細は E 波のみとする．

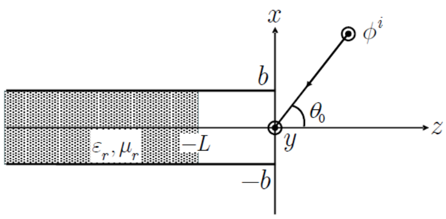

図 1．部分的に媒質を装荷した半無限平行平板導波管

2. 変換波動方程式

図 1 に示すような部分的に媒質を装荷した半無限平行平板導波管に平面 E 波が z 軸と角度 θ_0 をなして入射する 2 次元問題を考える．但し，導波管内の領域で $-\infty < z \le -L$ には比誘電率 ε_r，比透磁率 μ_r なる媒質で満たされているものとする．全電界 $\phi^t(x,z)\left[=E_y{}^t(x,z)\right]$ を次式で定義する．

$$\phi^t(x,z) = \phi^i(x,z) + \phi(x,z). \tag{1}$$

但し，$\phi^i(x,z)$ は入射界で

$$\phi^i(x,z) = e^{-ik(x\sin\theta_0 + z\cos\theta_0)}$$
$$\left(k = \omega(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}, 0 < \theta_0 < \pi/2\right) \tag{2}$$

全電界 $\phi^t(x,z)$ は以下の 2 次元波動方程式を満足する．

$$[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mu(x,z)\varepsilon(x,z)k^2]\phi^t(x,z) = 0 \tag{3}$$

但し，

$$\varepsilon(x,z) = \begin{cases} \varepsilon_r, & z < -L, \\ 1, & z > -L, \end{cases} \tag{4}$$

$$\mu(x,z) = \begin{cases} \mu_r, & z < -L, \\ 1, & z > -L. \end{cases} \tag{5}$$

また，零でない電磁界成分については，次式に示すような関係が成り立つ．

$$\left(E_y{}^t, H_x{}^t, H_z{}^t\right) = \left[\phi^t, \frac{1}{i\omega\mu_0\mu(x,z)}\frac{\partial\phi^t}{\partial z}, \frac{i}{\omega\mu_0\mu(x,z)}\frac{\partial\phi^t}{\partial x}\right]. \tag{6}$$

解析の都合上，媒質に微小損失を導入し，

$$k = k_1 + ik_2, 0 < k_2 << k_1 \tag{7}$$

とすると，散乱界 $\phi(x,z)$ における漸近的な振る舞いは

$$\left.\begin{aligned} &\phi(x,z) = O(e^{-k_2 z}), z \to \infty, \\ &\phi(x,z) = O(e^{k_2 z\cos\theta_0}), z \to -\infty. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

散乱界 $\phi(x,z)$ の z に関する Fourier 変換を次式で定義する．

$$\Phi(x,\alpha) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,z)e^{i\alpha z}dz, (\alpha = \sigma + i\tau). \tag{9}$$

$\Phi(x,\alpha)$ は式(8)から帯状領域 $-k_2 < \tau < k_2\cos\theta_0$ の範囲で正則となる．また，Fourier 積分を

$$\Phi_+(x,\alpha) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\phi(x,z)e^{i\alpha z}dz, \tag{10}$$

$$\Phi_1^0(x,\alpha) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-L}^{0}\phi^t(x,z)e^{i\alpha z}dz, \tag{11}$$

$$\Phi_-^r(x,\alpha) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{-L}\phi^t(x,z)e^{i\alpha(z+L)}dz \tag{12}$$

で定義する．整理すると．

$$\Phi(x,\alpha) = \Psi_{(+)}(x,\alpha) + \Phi_1^0(x,\alpha) + e^{-i\alpha L}\Phi_-^r(x,\alpha). \tag{13}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_{(+)}(x,\alpha) = \Phi_+(x,\alpha) - \frac{Ae^{-ikx\sin\theta_0}}{\alpha - k\cos\theta_0}, \\ &A = -(2\pi)^{-1/2}i. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

式(13)において，$\Phi_+(x,\alpha)$ は，上半平面 $\tau > -k_2$ において正則，$\Phi_1^0(x,\alpha)$ は全領域において正則，$\Phi_-^r(x,\alpha)$ は下半面 $\tau < k_2\cos\theta_0$ で正則である．また，式(14)から $\Phi_+(x,\alpha)$ の添字は，1 位の極 $\alpha = k\cos\theta_0$ を除いた上半平面 $\tau > -k_2$ で正則であることを示す.

式(2.1)，式(3)を考慮すると，媒質が装荷されてない領域は

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2)\phi(x,z)=0 \tag{15}$$

となり，媒質が装荷された領域は

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+{k_r}^2)\phi^t(x,z)=0 \tag{16}$$

となる波動方程式が成り立つ. 但し，$k_r=(\varepsilon_r\mu_r)^{1/2}k$ である．そこで領域 $|x|>b$ に対して，式(15)の Fourier 変換を施すと

$$(\frac{d^2}{dx^2}-\gamma^2)\Phi(x,a)=0 \tag{17}$$

となる．但し，$\gamma=(\alpha^2-k^2)^{1/2}$ である．γ は α の 2 価関数であるので，$\alpha=0$ のとき $\gamma=-ik$ となるものを γ の分岐として使用する．このとき，帯状領域 $|\tau|<k_2$ に属する任意の α に対し，$\mathrm{Re}\gamma>0$ であることがわかる．式(17)は領域 $|x|>b$ における変換波動方程式である．

式(15)の両辺に $(2\pi)^{-1/2}e^{i\alpha z}$ をかけ，$-L<z<\infty$ について z に関する積分を施すそして整理すると，

$$(\frac{d^2}{dx}-r^2)\left[\Phi_1^0(x,\alpha)+\Psi_{(+)}(x,\alpha)\right]$$
$$=e^{-i\alpha L}[\frac{1}{\mu_r}f_e(x)-i\alpha g_e(x)]. \tag{18}$$

ここで

$$f_e(x)=(2\pi)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial z}\phi^t(x,-L), \tag{19}$$

$$g_e(x)=(2\pi)^{-1/2}\phi^t(x,-L) \tag{20}$$

である.

式(18)は $|x|\le b|$ において媒質の装荷されていない領域における変換波動方程式である.

媒質が装荷されている領域においては，$-\infty<z<-L$ の領域で z に関する積分を施し，式(19)，式(20)を考慮すれば，媒質の装荷した領域における変換波動方程式は次のようになる.

$$(\frac{d^2}{dx^2}-\Gamma^2)\Phi_-^r(x,\alpha)=-[f_e(x)-i\alpha g_e(x)] \tag{21}$$

また，Fourier 変換領域における散乱界表現は，$x\ge b$ のとき，

$$\Phi(x,\alpha)=\Psi_{(+)}(b,\alpha)e^{-\gamma(x-b)} \tag{22}$$

となり，$|x|\le b$ のとき

$$\Phi(x,\alpha)=\Psi_{(+)}(b,\alpha)\frac{\sinh\gamma(x+b)}{\sinh 2\gamma b}$$
$$-\Psi_{(+)}(-b,\alpha)\frac{\sinh\gamma(x-b)}{\sinh 2\gamma b}$$
$$-e^{-i\alpha L}\frac{1}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{en}^{+}(\alpha)}{\alpha^2+r_n^2}\sin\frac{n\pi}{2b}(x+b)$$
$$+e^{-i\alpha L}\frac{1}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{en}^{-}(\alpha)}{\alpha^2+\Gamma_n^2}\sin\frac{n\pi}{2b}(x+b), \tag{23}$$

となり，$x\le -b$ のとき，

$$\Phi(x,\alpha)=\Psi_{(+)}(-b,\alpha)e^{\gamma(x+b)} \tag{24}$$

となる.

3. 連立 Wiener-Hopf 方程式

前節において述べたように γ の分岐は $\mathrm{Re}\gamma>0$ であったから，放射条件および境界条件より，変換波動方程式の解において x について微分し，$x=\pm b\pm 0$ とおくと，

$$\begin{aligned}\Phi'(b+0,\alpha)&=-\gamma\Psi_{(+)}(b,\alpha)\\ \Phi'(-b-0,\alpha)&=\gamma\Psi_{(+)}(-b,\alpha)\end{aligned} \tag{25}$$

$|x|\le b$ については，項別に微分し，$x=\pm b\mp 0$ とおけば，

$x=\pm b$ における磁界の境界条件（磁界の接線成分は連続）より

$$\frac{\partial\phi(\pm b+0,z)}{\partial x}=\frac{\partial\phi(\pm b-0,z)}{\partial x}, z>0 \tag{26}$$

である，Fourier 変換領域における表現は次のようになる.

$$\Phi_+^{'}(\pm b+0,\alpha)=\Phi_+^{'}(\pm b-0,\alpha). \tag{27}$$

また，式(25)から整理すると，

変換波動方程式の解を微分し，x 軸における電界の境界条件を考慮すると

$$J_-^{\,d}(\alpha)=-\frac{U_{(+)}(\alpha)}{L(\alpha)}$$
$$-e^{-i\alpha L}\sum_{n=1,odd}^{\infty}\frac{n\pi}{b^2}\frac{{C_{en}}^{+}(\alpha)}{\alpha^2+\gamma_n^2}$$
$$+e^{-i\alpha L}\sum_{n=1,odd}^{\infty}\frac{n\pi}{b^2}\frac{{C_{en}}^{-}(\alpha)}{\alpha^2+\Gamma_n^2}, \tag{28}$$

$$J_-^{\,s}(\alpha)=-\frac{V_{(+)}(\alpha)}{N(\alpha)}$$
$$+e^{-i\alpha L}\sum_{n=2,even}^{\infty}\frac{n\pi}{b^2}\frac{{C_{en}}^{+}(\alpha)}{\alpha^2+\gamma_n^2}$$
$$-e^{-i\alpha L}\sum_{n=2,even}^{\infty}\frac{n\pi}{b^2}\frac{{C_{en}}^{-}(\alpha)}{\alpha^2+\Gamma_n^2}, \tag{29}$$

但し，

$$U_{(+)}(\alpha)=\Psi_{(+)}(b,\alpha)+\Psi_{(+)}(-b,\alpha), \tag{30}$$

$$V_{(+)}(\alpha)=\Psi_{(+)}(b,\alpha)-\Psi_{(+)}(-b,\alpha), \tag{31}$$

$$J_-^{\,\overset{d}{s}}(\alpha)=J_-(b,\alpha)\mp J_-(-b,\alpha), \tag{32}$$

$$J_-(\pm b,\alpha)=\Phi'(\pm b\pm 0,\alpha)-\Phi'(\pm b\mp 0,\alpha) \tag{33}$$

$$L(\alpha)=\frac{e^{-rb}\coth\gamma b}{\gamma},\quad N(\alpha)=\frac{e^{-rb}\sinh\gamma b}{\gamma} \tag{34}$$

よって式(28)および式(29)が連立 Wiener-Hopf 方程式をえられる．なお，$L(\alpha),N(\alpha)$ は核関数である．

4. 核関数の分解

核関数 $L(\alpha),N(\alpha)$ は以下に示す積形式に分解できることが知られている[9].

$$\left.\begin{aligned}L(\alpha)&=L_+(\alpha)L_-(\alpha)=L_+(\alpha)L_+(-\alpha),\\ N(\alpha)&=N_+(\alpha)N_-(\alpha)=N_+(\alpha)N_+(-\alpha).\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

但し，

$$\begin{aligned}L_+(\alpha)&=(\cos kb)^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}(k+\alpha)^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(\frac{i\gamma b}{\pi}\ln\frac{\alpha-\gamma}{k}\right)\\ &\cdot\exp\left[\frac{i\alpha b}{\pi}\left(1-C+\ln\frac{\pi}{2kb}+i\frac{\pi}{2}\right)\right]\\ &\cdot\prod_{n=1,\mathrm{odd}}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha}{i\gamma_n}\right)e^{\frac{2i\alpha b}{n\pi}},\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}N_+(\alpha)&=\left(\frac{\sin kb}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(\frac{i\gamma b}{\pi}\ln\frac{\alpha-\gamma}{k}\right)\\ &\cdot\exp\left[\frac{i\alpha b}{\pi}\left(1-C+\ln\frac{\pi}{2kb}+i\frac{\pi}{2}\right)\right]\\ &\cdot\prod_{n=2,\mathrm{even}}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha}{i\gamma_n}\right)e^{\frac{2i\alpha b}{n\pi}}\end{aligned} \tag{37}$$

であり，$C(=0.57721566\cdots)$ は Euler 定数である．分解関数 $L_\pm(\alpha),N_\pm(\alpha)$ は $\tau\gtrless\mp k_2$ において正則かつ非零であり，その漸近的振る舞いは, Gamma 関数における Stirling の公式を用いることにより，次のようになる．

$$L_\pm(\alpha)\sim(\mp 2i\alpha)^{-\frac{1}{2}},\alpha\to\infty, \tag{38}$$

$$N_\pm(\alpha)\sim(\mp 2i\alpha)^{-\frac{1}{2}},\alpha\to\infty. \tag{39}$$

5. Wiener-Hopf 方程式の解

Wiener-Hopf 方程式(28)の両辺に $L_-(\alpha)$ をかけると，

$$\begin{aligned}J_-^d(\alpha)L_-(\alpha)&=-\frac{U_{(+)}(\alpha)}{L_+(\alpha)}\\ &-e^{-i\alpha L}\Bigg(\sum_{n=1,odd}^{\infty}\frac{n\pi}{b^2}\frac{L_-(\alpha)C_{en}{}^{+}(\alpha)}{\alpha^2+\gamma_n{}^2}\\ &-\sum_{n=1,odd}^{\infty}\frac{n\pi}{b^2}\frac{L_-(\alpha)C_{en}{}^{-}(\alpha)}{\alpha^2+\Gamma_n{}^2}\Bigg)\end{aligned} \tag{40}$$

が得られる．ここで，2 項目，3 項目について分解操作を施すと，また，1 項目については，1 位の極 $\alpha=k\cos\theta_0$ を消去することにより，$U_{(+)}(\alpha)/L_+(\alpha)$ は，

$$\begin{aligned}\frac{U_{(+)}(\alpha)}{L+(\alpha)}&=\left\{\frac{U_{(+)}(\alpha)}{L_+(\alpha)}+\frac{2A\cos(kb\sin\theta_0)}{L_+(k\cos\theta_0)(\alpha-k\cos\theta_0)}\right\}\\ &-\frac{2A\cos(kb\sin\theta_0)}{L_+(k\cos\theta_0)(\alpha-k\cos\theta_0)}.\end{aligned} \tag{41}$$

このときに， 解析接続の原理，端点条件，Liouville の定理により，

$$\begin{aligned}\frac{U_{(+)}(\alpha)}{L+(\alpha)}&=\sum_{\substack{n=1\\odd}}^{\infty}\frac{n\pi}{b^2}\frac{L_+(i\gamma_n)C_{en}^{+}(-i\gamma_n)}{2i\gamma_n(\alpha+i\gamma_n)}\\ &-\frac{2A\cos(kb\sin\theta_0)}{L_+(k\cos\theta_0)(\alpha-k\cos\theta_0)}\end{aligned} \tag{42}$$

式(42)の両辺に $L_+(\alpha)$ をかけると，

$$\begin{aligned}U_{(+)}(\alpha)&=-L_+(\alpha)\\ &\cdot\Bigg[\sum_{\substack{n=1\\odd}}^{\infty}\frac{n\pi}{b^2}\frac{L_+(i\gamma_n)(-1)\rho_n e^{-\gamma_n L}\frac{n\pi}{2b}U_{(+)}(i\gamma_n)}{2i\gamma_n(\alpha+i\gamma_n)}\\ &+\frac{2A\cos(kb\sin\theta_0)}{L_+(k\cos\theta_0)(\alpha-k\cos\theta_0)}\Bigg].\end{aligned} \tag{43}$$

さらに，$U_{(+)}(\alpha)$ を b で割り整理すると，式(43)は

$$\begin{aligned}\frac{U_{(+)}(\alpha)}{b}&=-\frac{L_{(+)}(\alpha)}{b^{1/2}}\\ &\cdot\Bigg[\frac{B_u}{b(\alpha-k\cos\theta_0)}\\ &+\sum_{n=1}^{N}\frac{a_u\rho_{2n-1}\rho_n u_n^{+}}{b(\alpha+i\gamma_{2n})}e^{-2\gamma_{2n-1}L}\\ &+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{a_u\rho_{2n-1}\rho_n Kn^{-3/2}}{b(\alpha+i\gamma_{2n})}e^{-2\gamma_{2n-1}L}\Bigg].\end{aligned} \tag{44}$$

なる．ここで，

$$B_u=\frac{2b^{\frac{1}{2}}A\cos(kb\sin\theta_0)}{L_+(k\cos\theta_0)}, \tag{45}$$

$$b_n=\frac{\left\{(n-\frac{1}{2})\pi\right\}^2}{bi\gamma_{2n-1}},\rho_n=\frac{1}{b^{1/2}}L+(i\gamma_{2n-1}), \tag{46}$$

$$u_n^{+}=\frac{U_{(+)}(i\gamma_{2n-1})}{b}. \tag{47}$$

式(44)は連立 Wiener-Hopf 方程式(28)の厳密解(形式解)である．$V_{(+)}(\alpha)$ の場合と同様に解析接続の原理，端点条件，Liouville の定理を適用すれば，

$$\frac{V_{(+)}(\alpha)}{b} = \frac{N_{(+)}(\alpha)}{b^{1/2}} \left[\frac{B_u}{b(\alpha - k\cos\theta_0)} - \sum_{n=1}^{N} \frac{b_u \rho_{2n} g_n v_n^+}{b(\alpha + i\gamma_{2n})} e^{-2\gamma_{2n} L} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{b_u \rho_{2n} g_n K n^{-3/2}}{b(\alpha + i\gamma_{2n})} e^{-2\gamma_{2n} L} \right], \qquad (48)$$

$$B_u = \frac{2ib^{\frac{1}{2}} A \sin(kb\sin\theta_0)}{N + (k\cos\theta_0)}, \qquad (49)$$

$$b_n = \frac{(n\pi)^2}{bi\gamma_{2n}}, g_n = \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}} N + (i\gamma_{2n}), \qquad (50)$$

$$v_n^+ = \frac{V_{(+)}(i\gamma_{2n})}{b}. \qquad (51)$$

が導かれる．式(48)は連立 Wiener-Hopf 方程式(29)の厳密解(形式解)である．

6. 散乱界

散乱界は式(27)Fourier 変換領域における表現に Fourier 逆変換をすれば，導波管内部の散乱（TE モード）を得られる．

(i) $-\infty < z < -L$ のとき，

$$\phi(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^e \sin\frac{n\pi}{2b}(x+b) e^{\Gamma n(z+L)} - e^{-ik(x\sin\theta_0 + z\cos\theta_0)}. \qquad (52)$$

但し， T_n^e は透過係数であり

$$T_n^e = (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}} \frac{n\pi}{b^2} \frac{\mu_r}{\Gamma_n - \mu_r\gamma_n} e^{-\gamma_n L} U_{(+)}(i\gamma_n), n: 奇数 ,$$
$$= -(\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}} \frac{n\pi}{b^2} \frac{\mu_r}{\Gamma_n - \mu_r\gamma_n} e^{-\gamma_n L} V_{(+)}(i\gamma_n), n: 偶数. \qquad (53)$$

(ii) $-L < z < 0$ のとき

$$\phi(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n e^{\gamma n(z+L)} + B_n e^{-\gamma_n(z+L)} \right] \cdot \sin\frac{n\pi}{2b}(x+b) - e^{-ik(x\sin\theta_0 + z\cos\theta_0)}. \qquad (54)$$

但し，A_n, B_n は

$$A_n = (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\gamma_n L}}{\gamma_n} \frac{n\pi}{2b^2} U_{(+)}(i\gamma_n),\quad n: 奇数,$$
$$= -(\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\gamma_n L}}{\gamma_n} \frac{n\pi}{2b^2} V_{(+)}(i\gamma_n),\quad n: 偶数, \qquad (55)$$

$$B_n = (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}} \frac{\rho_n e^{-\gamma_n L}}{\gamma_n} \frac{n\pi}{2b^2} U_{(+)}(i\gamma_n),\quad n: 奇数 ,$$
$$= -(\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}} \frac{\rho_n e^{-\gamma_n L}}{\gamma_n} \frac{n\pi}{2b^2} V_{(+)}(i\gamma_n), n: 偶数. \qquad (56)$$

散乱遠方界は鞍部点法を適用すると

$$\Phi(\rho,\theta) \sim \pm\Psi_{(+)}(\pm b, -k\cos\theta) \cdot k\sin\theta e^{\pm ikb\sin\theta} \frac{e^{i(k\rho-\pi/4)}}{(k\rho)^{1/2}},$$
$$(\theta \not\approx \pi - \theta_0), (k\rho \to \infty), (x \pm b). \qquad (57)$$

ここで，極座標 $x = \rho\sin\theta,\quad z = \rho\cos\theta$, $\theta \approx \pi - \theta_0$ では，$\alpha = k\cos\theta_0$ における極のため成り立たない．

7. むすび

本研究では，部分的に媒質を装荷した半無限平行平板導波管による平面電磁波の回折問題を取り上げ，E 波と H 入射の場合について，Wiener-Hopf 法による厳密な解析を行って，Wiener-Hopf 方程式の解に現れる無限級数の係数に端点条件を厳密に適用することによって，任意の導波管開口幅に関し一様に有効となる解を求め得られた．

謝辞

本研究を取組むにあたり，多大なる御指導・御助言を頂いた小林一哉教授，並びに同研究室の長坂崇史助教に心から感謝致します．

文献

[1] L. A. Weinstein, *The Theory of Diffraction and the Factorization Method (Generalized Wiener-Hopf Technique)*, The Golem Press, 1969.

[2] V. Daniele and R. Zich, *The Wiener-Hopf Method in Electromagnetics*, SciTech Publishing, 2014.

[3] K. Kobayashi, and A. Sawai, “plane wave diffraction by an open-ended parallel waveguide cavity, ” J. of Electromagn. Waves Appl.， vol. 6，pp. 475-512, 1992.

[4] S．Koshikawa，and K．Kobayashi，“Diffraction by a parallel-plate waveguide cavity with athich planer termination，”IEICE Trans．Electoron.，vol．E76-C，No. 1，pp．142-158,1993.

[5] 杉林，“誘電体・フェライト媒質装荷開口端平行平板導波管による回折に関する研究”，早稲田大学修士論文，1993.

[6] 杉林，越川，小林，堀内，“誘電体・フェライト装荷開口端平行平板導波管による平面電磁波の回折”，1993 年電子情報通信学会春季大会.

[7] K. W. He, T. Nagasaka, and K. Kobayashi, “Diffraction by a Semi-infinite Parallel-Plate Waveguide with Partial Material Loading”, PIERS 2019, Xiamen, China, 17 - 20 December 2019.

[8] K. W. He, T. Nagasaka, and K. Kobayashi, “Wiener-Hopf analysis of the Diffraction by a Semi-infinite Parallel-Plate Waveguide with Partial Material Loading”, URSI GASS 2020, Rome, Italy, 29 August – 5 September 2020. （Submitted）

[9] 小林:“Wiener-Hopf 法とその散乱・回折問題への応用”，応用数理への道，堀内和夫編著，第 9 章，コロナ社(1989).