# 非線形回路の直流動作点解析のための効率的な可変利得ホモトピー法

An Efficient Variable-Gain Homotpy Method for Finding DC Operating Points of Nonlinear Circuits

電気電子情報通信工学専攻　島田　巧
Takumi　SHIMADA

## 1.　まえがき

大規模回路シミュレーションにおける直流動作点解析の「非収束問題」を理論面・実用面の両方から解決する方法として，ホモトピー法に関する研究が行われている．その結果，最も解析が困難とされるバイポーラアナログ回路に対して，その最大級である 2 万素子クラスのアナログ LSI を世界で初めて収束の保証付きで解くことに成功するなど，ホモトピー法は産業界においても多大な実績を残している [1]〜[7].

ホモトピー法の研究は 1. 理論的研究，2. 効率的な解曲線追跡法に関する研究，3. インプリメンテーションに関する研究，4. ホモトピー関数に関する研究の四つに大別される．本論文では，4. のホモトピー関数に関する研究に着目する．ホモトピー法にはいくつかの種類があるが，その中でも欧米で多くの研究がされている可変利得ホモトピー法（VGH 法）は最も効率的なホモトピー法の一つであるとされている [5].

本論文では，VGH 法の構造的な欠点を指摘するとともに，その欠点を改良した効率的な VGH 法を提案する．また，提案手法の大域的収束性を証明するとともに，回路シミュレータ SPICE に簡単に実装する方法について述べ，提案手法が従来の VGH 法よりも効率的であることを示す．

## 2.　従来の可変利得ホモトピー法

最初に，非線形方程式

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

に対する VGH 法について説明する．式 (1) が SPICE で使われている修正節点方程式の場合，この式は次のように表される [4].

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_g(\boldsymbol{x}) &\triangleq \boldsymbol{D}_g \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}_g^T \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{D}_E \boldsymbol{i} + \boldsymbol{J} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{f}_E(\boldsymbol{v}) &\triangleq \boldsymbol{D}_E^T \boldsymbol{v} - \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2}$$

ただし $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^N$ は節点電圧を表す変数ベクトル，$\boldsymbol{i} \in \mathbb{R}^M$ は独立電圧源を流れる電流を表す変数ベクトル，$\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^K$ は抵抗素子の電圧電流特性を表す連続関数，$\boldsymbol{D}_g$ と $\boldsymbol{D}_E$ は回路の構造を表す $N \times K$ 並びに $N \times M$ の既約接続行列，$\boldsymbol{J} \in \mathbb{R}^N$ と $\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^M$ は独立電流源および独立電圧源によって定まる定数ベクトルである．また $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_g, \boldsymbol{f}_E)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{i})^T \in \mathbb{R}^n$, $n = N + M$ とする．

また議論を簡単にするため，バイポーラ接合トランジスタ（BJT）の枝電圧 $\boldsymbol{v}_q = (v_{\mathrm{be}}, v_{\mathrm{bc}})^T$ と枝電流 $\boldsymbol{i}_q = (i_{\mathrm{e}}, i_{\mathrm{c}})^T$ の特性は Ebers-Moll モデル

$$\boldsymbol{i}_q(\boldsymbol{v}_q) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{\mathrm{e}}(\exp(n_{\mathrm{e}} v_{\mathrm{be}}) - 1) \\ m_{\mathrm{c}}(\exp(n_{\mathrm{c}} v_{\mathrm{bc}}) - 1) \end{bmatrix} \tag{3}$$

で表されるものと仮定する．ホモトピー法では式 (1) を解くのに，パラメータ $\lambda \in (0, 1)$ を導入し，$(\boldsymbol{x}, \lambda)$ を変数とする方程式

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \lambda) = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

を考える．ただし，$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{0}$ は既知解 $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ をもち，$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, 1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ であるものとする．このような関数をホモトピー関数と呼ぶ．式 (4) を満たす $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ の集合は一般に $\mathbb{R}^{n+1}$ における曲線となる．ホモトピー法は，このような解曲線を $(\boldsymbol{x}^0, 0)$ から出発して追跡し，$\lambda = 1$ に達した時点で式 (1) の解 $\boldsymbol{x}^*$ を得る方法である．

可変利得ホモトピー法（VGH 法）ではホモトピー関数として

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \lambda) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{\alpha}) + (1 - \lambda) \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \tag{5}$$

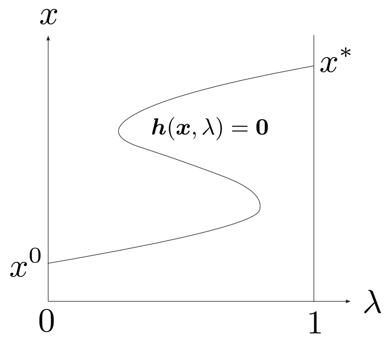


図 1　ホモトピー法の解曲線

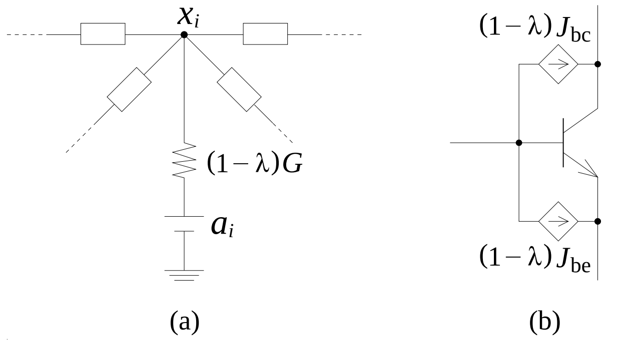


図 2　従来の VGH 法の回路的解釈

を用いる．ただし $\boldsymbol{\alpha}$ はトランジスタの電流利得 $\alpha_f$，$\alpha_r$ からなるベクトルで，$\lambda\boldsymbol{\alpha}$ はすべての電流利得に $\lambda$ が掛けられていることを意味する．また $\boldsymbol{a}$ はランダムに選んだ $n$ 次元定数ベクトルである．更に $\boldsymbol{A}$ は $n\times n$ の対角行列

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} G\cdot\boldsymbol{I}_N & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & R\cdot\boldsymbol{I}_M \end{bmatrix} \tag{6}$$

である．ただし $\boldsymbol{I}_N$, $\boldsymbol{I}_M$ は単位行列, $G$, $R$ は定数で, $G$ の値としては $10^{-3}$ くらいの値がよく用いられている．

## 3.　提案手法

ホモトピー法の研究ではホモトピー関数を回路的に解釈することがよく行われるが，VGH 法は回路的には次のように解釈される．まず，図 2(a) のようにもとの回路のすべての節点とグランドの間にコンダクタンス $(1-\lambda)G$ と電圧源 $a_i$ を接続する．次にすべてのトランジスタに図 2(b) のように従属電流源を接続することにより，電流利得 $\alpha$ に $\lambda$ を掛ける．ただし

$$\begin{bmatrix} J_{\mathrm{be}} \\ J_{\mathrm{bc}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \alpha_r \\ \alpha_f & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{\mathrm{e}}(\exp(n_{\mathrm{e}}v_{\mathrm{be}})-1) \\ m_{\mathrm{c}}(\exp(n_{\mathrm{c}}v_{\mathrm{bc}})-1) \end{bmatrix} \tag{7}$$

このような回路の修正節点方程式は $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\lambda)=\boldsymbol{0}$ となる．

従来の VGH 法の欠点は，$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{0}$ で記述される回路と $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ で記述される回路のトポロジーが全く違うため，解曲線が複雑な挙動を起こしやすいことである．例えば，実用的な回路では BJT のベース・コレクタ間に通常逆バイアスがかかり，$v_{\mathrm{bc}}<0$ となるが，$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\lambda)=\boldsymbol{0}$ で記述される回路ではすべてのベース節点とコレクタ節点がグランドに接続されているため，そこに電流が流れ，解曲線が $\lambda=1$ に近くなるまで $v_{\mathrm{bc}}$ が正の値をとることが多く，そのことが解曲線の複雑な挙動を引き起こしていた．

もう一つの欠点は，いわゆる end game が起こることである．BJT の指数関数の非線形性は非常に強く，$v_{\mathrm{be}}\geq 0.6$ で非線形性が急激に増大する．もしすべての節点とグランドの間に線形コンダクタンスが接続されていると，$\lambda$ が 1 に近くなるまで線形コンダクタンスに電流が流れ続ける．そのため $\lambda$ が 1 になる直前で BJT が一斉に動作を開始し，解曲線は離れた位置から $\lambda=1$ 超平面付近を横滑りするように解へと進む．このような現象を end game と呼ぶ．

本論文では，行列 $\boldsymbol{A}$ を次のようにとる新しい VGH 法を提案する．

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_g\boldsymbol{G}_{FP}\boldsymbol{D}_g^T & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{8}$$

ここで $\boldsymbol{G}_{FP}$ は正の値を持つ対角行列である．本手法を回路的に解釈すると次のようになる．まず，図 3 のように全ての BJT に対し，ベース･エミッタ間に $(1-\lambda)G_E$，ベース・コレクタ間に $(1-\lambda)G_C$ の線形コンダクタンスをそれぞれ接続する．次に全ての BJT に図 2(b) のような従属電流源を接続する．ここで $G_E\approx 10^{-3}$，$G_C\approx 10^{-12}$ とする．

提案手法は次のような利点をもつ．まず $G_C$ の値が非常に小さいため，ベース-コレクタ間の線形コンダクタンス $G_C$ にはほとんど電流が流れないので，前述のような解曲線の複雑な挙動を起こさない．また適度な値の線形コンダクタンス $(1-\lambda)G_E$ がベース-エミッタ間に Ebers-Moll モデルのダイオードと並列に接続されるため，指数関数の強い非線形性が緩和される．そのため，end game が起こりにくくなる．

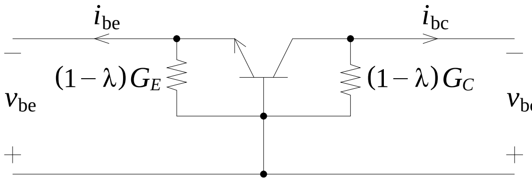


図 3　提案手法の回路的解釈

## 4.　提案手法の大域的収束性

提案手法の大域的収束性については，以下の定理が成立する．

**定理 1.** 回路に含まれる非線形抵抗の電圧・電流特性を表す非線形関数がリプシッツ連続かつある点において一様受動であるとする．このとき，この回路を記述する修正節点方程式に対して，提案手法は大域的収束性を持つ．すなわち，任意の $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{x}^0, 0)$ を出発点とする改良 VGH 法の解曲線は $\lambda = 1$ 超平面に到達する．

## 5.　提案手法の SPICE への実装

提案手法は SPICE 指向型解析法を用いると SPICE に簡単に実装することができる [4], [6], [7]．この方法では，良い初期値と定数項を決定する初期回路（図 4），式 (2),(5),(8) で表されるホモトピー関数を記述するホモトピー回路（図 5），パス追跡回路（図 6）を考える．これらの回路に対し SPICE の過渡解析を行うことで，提案手法の解曲線が実行される．

## 6.　数値例

数値例として，高利得演算増幅器 $\mu$A741 に対し従来の VGH 法と改良 VGH 法を適用した．ここで $G = 10^{-3}$，$G_E = 10^{-3}$，$G_C = 10^{-12}$ を用いて，最大ステップ幅は 0.08，初期値 $\boldsymbol{x}^0$ は $\boldsymbol{v}_q^0 = (0.7, 0)^T$ とした．図 7〜10 はトランジスタ Q5 と Q15 のベース・コレクタ間電圧，ベース・エミッタ間電圧の解曲線を表している．図 7 と図 9 を見ると，従来の VGH 法の解曲線は $v_{\mathrm{bc}}$ が正負の値を行き来しており，$\lambda = 1$ 付近で急激に解へと近づいている．しかし改良 VGH 法の解曲線はほぼ直線的に解へと収束している．さらに図 8 と図 10 を見ると，従来の VGH 法の解曲線は強い end game が起こっているのに対して，改良 VGH 法はそれが起こっていないことが分かる．ここで従来の VGH 法のマーカーが密集している所は，別の変数方向に大きく動いていることを示す．

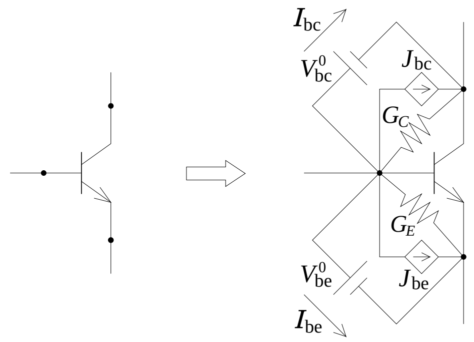


図 4　良い初期値と定数項を決定する初期回路

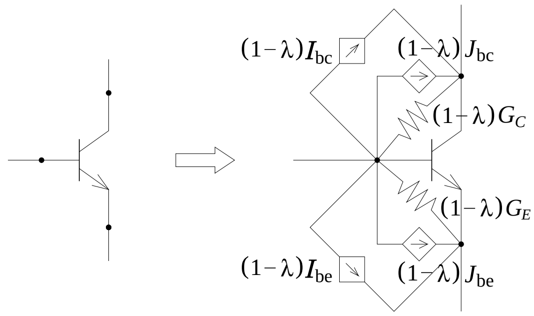


図 5　式 (2),(5),(8) を記述するホモトピー回路

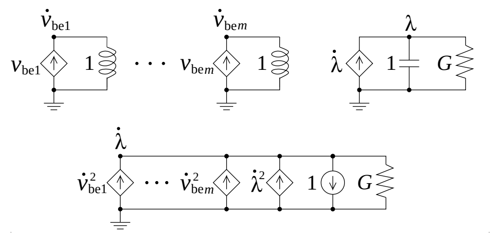


図 6　パス追跡回路

## 7.　むすび

本論文では新しい VGH 法を提案し，この方法が従来の VGH 法よりも効率的であることを示した．またこの方法が SPICE で使われている修正節点方程式に対して大域的収束性をもつことや，SPICE 上に簡単にインプリメントできることを示した．

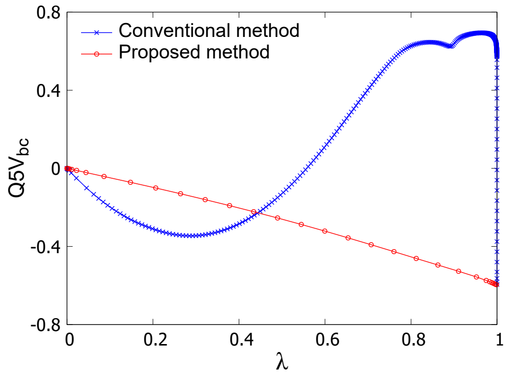


図 7　トランジスタ Q5 のベース・コレクタ間電圧の解曲線

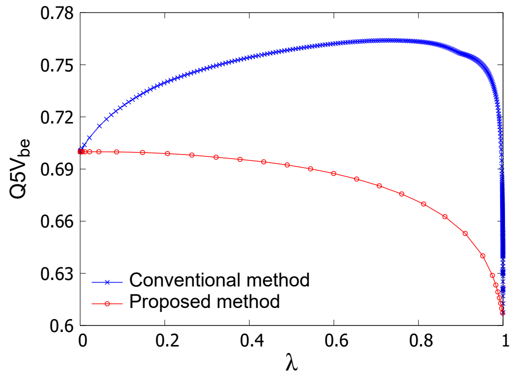


図 8　トランジスタ Q5 のベース・エミッタ間電圧の解曲線

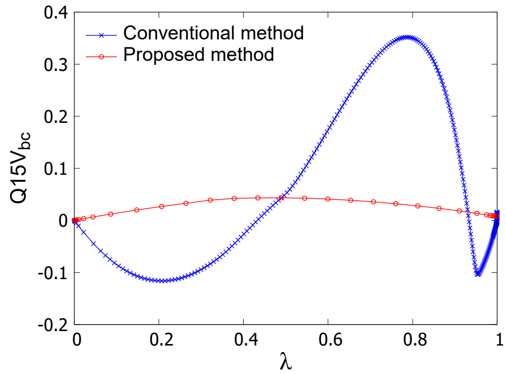


図 9　トランジスタ Q15 のベース・コレクタ間電圧の解曲線

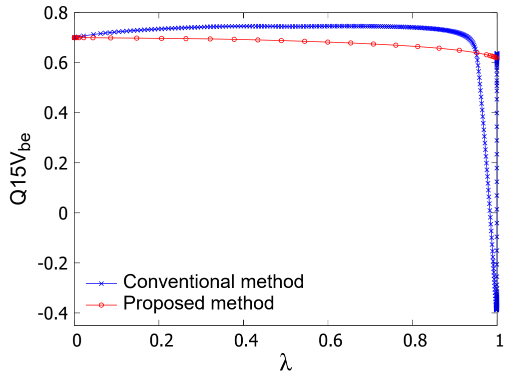


図 10　トランジスタ Q15 のベース・エミッタ間電圧の解曲線

## 文　献

[1] A. Ushida and L. O. Chua, "Tracing solution curves of non-linear equations with sharp turning points," Int. J. Circuit Theory Appl., vol.12, no.1, pp.1–21, Jan. 1984.

[2] K. Yamamura and K. Horiuchi, "A globally and quadratically convergent algorithm for solving nonlinear resistive networks," IEEE Trans. Comput.-Aided Design of Integr. Circuits Syst., vol.9, no.5, pp.487–499, May 1990.

[3] K. Yamamura, "Simple algorithms for tracing solution curves," IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol.40, no.8, pp.537–541, Aug. 1993.

[4] Y. Inoue and K. Yamamura, "Practical algorithms for dc operating-point analysis of large-scale circuits," in Proc. 1995 Int. Symp. Nonlinear Theory and its Applications, pp.1153–1158, Las Vegas, NV, Dec. 1995.

[5] L. Trajković, "Homotopy methods for computing dc operating points," in Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering, J. G. Webster, Ed. New York: Wiley, 1999, vol.9, pp.171–176. Jul. 2007.

[6] A. Ushida, Y. Yamagami, Y. Nishio, I. Kinouchi, and Y. Inoue, "An efficient algorithm for finding multiple DC solutions based on SPICE-oriented Newton homotopy method," IEEE Trans. Comput.-Aided Design of Integr. Circuits Syst., vol.21, no.3, pp.337–348, Mar. 2002.

[7] W. Kuroki, K. Yamamura, and S. Furuki, "An efficient variable gain homotopy method using the SPICE-oriented approach," IEEE Trans. Circuits Syst. II. Exp. Briefs, vol.54, no.7, pp.621–625, Jul. 2007.

## 研 究 業 績

[1] K. Yamamura and T. Shimada, "An efficient variable-gain homotopy method for finding DC operating points of transistor circuits," IEEE Workshop on Nonlinear Circuit Networks, pp.82–85 Dec. 2017.

[2] 山村清隆，島田巧，"非線形回路の直流動作点のための効率的な可変利得ホモトピー法," 電子情報通信学会技術研究報告，NLP2018-86, pp.75–79, Oct. 2018.

[3] K. Yamamura and T. Shimada, "An efficient variable-gain homotopy method for finding DC operating points of transistor circuits," Proc. 2018 IEEE Asia Pacific Conference on Circuits and Systems, pp.235–238, Oct. 2018.