Birnbaum-Saunders 分布に基づく統計的劣化モデルとノンパラメトリック手法を用いた形状関数の推定に関する研究

A Study of a Degradation Model Based on the Birnbaum-Saunders Distribution and Nonparametric Estimation of the Shape Function

経営システム工学専攻　藤田 賢治
Kenji Fujita

1　はじめに

製品のメンテナンスは故障や劣化が原因となる事故などを未然に防ぐ役割を担っており，適切なタイミングで行うことが求められている．メンテナンス時期の最適設計を行うときに，ものの劣化度合いを取り入れると良いということが知られている．劣化は時間と共に蓄積され，ある閾値に達した際に製品が故障する．劣化現象は時間とともに変化するランダム現象であると考えられ，確率過程 $\{Y(t)|t \geq 0\}$ を用いてモデル化される．中でも Lévy 過程は独立増分と定常増分を持つため劣化現象に適していると考えられており， Lévy 過程に基づく劣化モデルが良く研究されている (Abdel-Hameed (2014))．

一般的な劣化モデルに関する言及は Meeker and Escobar (1998) に記述されている．Wiener 過程に基づく劣化モデルは Doksum and Hóyland (1992) などによって長年研究されている．Gamma 分布に基づく劣化モデルは Bagdonavičius and Nikulin (2000) などで研究されている．IG 過程は Wasan (1968) などで研究されており， Peng (2015) において IG 過程は劣化モデルとして適していると結論づけられている．上記に示した Wiener，Gamma，IG 過程は全て Lévy 過程であり，劣化モデルによく用いられ研究されてきた．最近，Tamaru and Nagatsuka (2019) によって，正規，Gamma，IG 分布の一般化分布である一般化逆ガウス（GIG）分布に基づく劣化モデルが提案された．

一方で，Birnbaum-Saunders（BS）分布は，Birnbaum and Saunders (1969) によって故障の物理現象に基づいて提案された．BS 分布は IG 分布の近似として得られることが知られているが，BS 分布は再生性を持たない．BS 分布が再生性を持たないため BS 分布に基づく確率過程は定常増分を持たない．したがって，BS 分布に基づく確率過程は Lévy 過程に属さない．そのため今までのところ BS 分布に基づく劣化モデルの研究はほとんどなされていない．そこで本研究では BS 分布に基づく劣化モデルを提案する．

また，既存の劣化モデルにはモデルの定常性を保つために形状関数がよく用いられている．形状関数 $\Lambda(t)$ には過去の研究では，Wu and Shao (1999) で紹介された t，t^{γ}，$\exp(\gamma t)-1$ などがよく用いられてきたが，これらの妥当性に関する研究についてはほとんどされてこなかった．さらに，これまでは試行錯誤によって形状関数が決められており，どれを選ぶかに関しては体系的なアプローチがまだない．そこで本研究では，データから形状関数を推定する手法 2 つも併せて提案する．

評価には数多くの劣化解析の研究で使われてきたレーザーデータ (Meeker and Escobar (1998))，クラックデータ 1(Wu and Ni (2003))，クラックデータ 2(Meeker and Escobar (1998))，クラックデータ 3(Rodríguez-Picón et al. (2017)) を用いる．BS 分布に基づく劣化モデルについては固定効果モデルに焦点を当てて評価を行う．形状関数をデータから推定したモデルについては固定効果モデルの場合と変量効果モデル，混合効果モデルの場合において上記の実データを用いてそれぞれ評価を行う．また，こちらは汎化性能を測るためのクロスバリデーションも行う．さらに予測精度の評価も行うが，大量の実劣化データを得ることが難しいため，本研究では予測精度を測る方法としてシミュレーションを選択した．

2　従来の劣化モデル

劣化モデルの研究において，Lévy 過程に属している確率過程がよく用いられている．確率過程 $\{Y(t)|t \geq 0\}$ が以下の特性を持つ時，$\{Y(t)|t \geq 0\}$ は Lévy 過程であると言う．

1. Y(t) は右連続左極限のサンプルパスを持つ

2. Y(t) は独立増分を持つ

3. Y(t) は定常増分を持つ

Wiener 過程，Gamma 過程，IG 過程はこの Lévy 過程の性質を満たしており，過去によく研究されてきた．しかし，Lévy 過程に属していない確率過程に基づく劣化モデルの研究はほとんどされてこなかった．

また，劣化モデルの研究において，劣化モデルにはよく形状関数が組み込まれている．過去の研究では，形状関数は $\Lambda(t) = t$，$\Lambda(t) = t^\gamma$，$\Lambda(t) = \exp(\gamma t) - 1$ などが使われているが，形状関数を決める体系的なアプローチはない．

3 提案手法

本研究では Birnbaum-Saunders(BS) 分布に基づく劣化モデルと形状関数をデータから推定する手法を 2 つ提案する．

観測時間 $T^* = \{t_0, t_1, \dots, t_m | t_0 < t_1 < \dots < t_m\}$，$t_0 = 0$ が与えられた下で，確率過程 $\{Y(t) | t \in T^*\}$ が以下の性質を持つ時，$\{Y(t) | t \in T^*\}$ を BS 劣化モデルとする．

1. $Y(0) = 0$

2. $Y(t)$ は独立増分を持つ
   $Y(t_1) - Y(t_0), Y(t_2) - Y(t_1), \cdots, Y(t_m) - Y(t_{m-1})$ は独立である

3. 増分は BS 分布 $\mathcal{BS}(\alpha\Delta\Lambda, \beta\Delta\Lambda)$ に従う
   $Y(t_j) - Y(t_{j-1}) \sim \mathcal{BS}(\alpha\Delta\Lambda, \beta\Delta\Lambda)$

この時，Λ は $\Lambda(0) = 0$ とする形状関数であり，$\Delta\Lambda = \Lambda(t_j) - \Lambda(t_{j-1})$ である．また，m は観測回数を表し，$j = 1, \cdots, m$ である．$BS(\alpha, \beta)$ は形状パラメータ α，尺度パラメータ β の BS 分布を表している．BS 分布は再生性を持たないため，BS 分布に基づく確率過程は Lévy 過程に属さない．そのため，BS 分布に基づく劣化モデルはほとんど研究されなかった．しかし，観測時間 T^* が与えられたという条件の下では尤度を構成できる．BS 分布は故障の物理現象に基づいて提案されているため，この BS 劣化モデルは故障に至るまでの劣化の現象を表すモデルとして，既存の劣化モデルよりも現象に適したモデルになると期待できる．

以下の手順で示したものが，形状関数をデータから推定する最尤法を用いた内挿のみの補間による手法（以下，提案手法 1）である．

1. データの観測時間の間隔ごとに，最尤法を用いて増分が従う分布のパラメータの推定を行い，最尤推定値を得る

2. 推定したパラメータごとに，得られた最尤推定値を直線で結んだ補間多項式を作成する

3. 作成した補間多項式を形状関数とする

2 つ目の手法として，以下の手順で推定を行う最尤法を用いた外挿付きのスプライン補間による手法（以下，提案手法 2）を提案する．

1. データの観測時間の間隔ごとに，最尤法を用いて増分が従う分布のパラメータの推定を行い，最尤推定値を得る

2. 推定したパラメータごとに，得られた最尤推定値を 3 次平滑化スプライン補間とその外挿を用いて繋ぎ，補間多項式を作成する

3. 作成した補間多項式を形状関数とする

これらの提案手法は体系的に形状関数を決められるほか，データから推定を行っているため妥当性があると考えられる．

4 評価

4.1 BS 劣化モデルの評価

BS 劣化モデルを過去の研究に倣って形状関数 $\Lambda(t)$ を定めて 4 種類の実データセットに当てはめ，対数尤度と AIC の観点から既存モデルと比較し評価を行った．レーザーデータに当てはめた結果を表 1 に，クラックデータ 1 に当てはめた結果を表 2 に示す．その他のデータに当てはめた結果はここでは省略する．

表 1 から，IG モデルが AIC の観点でデータに対して良い当てはまりを示したが，BS モデルの対数尤度と AIC の値は IG モデルのものと近いことが分かる．また表 2 から，BS モデルが対数尤度と AIC の観点で最も良い当てはまりを示していることが分かる．クラッ

表 1: レーザーデータ (Meeker and Escobar (1998)) に当てはめた結果 ($\Lambda(t) = t$)

モデル	LL	AIC
Gamma	69.61	-135.22
IG	75.03	**-146.07**
GIG	**75.51**	-145.03
BS (Prop.)	74.89	-145.77

表 2: クラックデータ 1(Wu and Ni (2003)) に当てはめた結果 ($\Lambda(t) = \exp(\gamma t) - 1$)

モデル	対数尤度	AIC
Gamma	-47.03	100.06
IG	-41.49	88.99
GIG	-39.85	87.69
BS (Prop.)	**-27.54**	**61.07**

クデータ 2 とクラックデータ 3 による比較においても，クラックデータ 1 と同様に BS モデルが最も良い当てはまりを示した．

これらのことから，一般的に BS 劣化モデルは劣化データに対して当てはまりを示すと考えられる．

4.2 形状関数の推定手法の評価

提案手法により推定した形状関数と比較対象となる既存の形状関数を IG モデル (Peng (2015)) に組み込み，BS 劣化モデルの評価と同様に 4 種類の実データセットに当てはめ比較と評価を行った．ここでは，形状関数を推定する際のパラメータ数を考慮するかどうかの議論ができていないため，AIC を用いての比較は不適切であると考え，対数尤度のみでの比較を行った．ただし，データに対して過適合しているかどうかの判定ができないため，推定した形状関数を用いたモデルの汎化性能を測るためのクロスバリデーションを行った．形状関数をデータから推定した IG モデルと既存の方法で形状関数を選択した IG モデルをレーザーデータに当てはめ，対数尤度と汎化性能を測る指標に用いた MSE の値を表 3 に，クラックデータ 1 に当てはめた結果を表 4 に示す．それ以外のデータに当てはめた結果はここでは省略する．また，表 4 には γ の最尤推定値 $\hat{\gamma}$ も併せて示す．実際の評価は変量効果も考慮して行ったが，ここでは固定効果モデルの結果のみを示す．

表 3，4 から，対数尤度の観点では提案手法 1，それに続いて提案手法 2 が良いことが分かる．しかし，汎化性能の観点では，形状関数 $\Lambda(t)$ に t^{γ} を選んだ時の $\hat{\gamma}$ が 1 から離れているとき，つまり劣化が指数関数的

表 3: レーザーデータ (Meeker and Escobar (1998)) に当てはめた結果

形状関数	対数尤度	MSE×10^2
t	75.03	**4.039**
提案手法 1	**85.24**	4.380
提案手法 2	82.19	4.227

表 4: クラックデータ 1(Wu and Ni (2003)) に当てはめた結果

形状関数	対数尤度	MSE×10^1
t^{γ} ($\hat{\gamma} = 1.37$)	-49.85	1.612
$\exp(\gamma t) - 1$ ($\hat{\gamma} = 0.26$)	-41.49	1.434
提案手法 1	**-17.47**	1.390
提案手法 2	-22.90	**1.373**

表 5: シミュレーション結果 ($\Lambda(t) = \exp(a_1 t^2) - 1$, $a_1 = 0.01$)

t		t^{γ}		$\exp(\gamma t) - 1$	
n	MSE×10^3	n	MSE×10^{-3}	n	MSE×10^{-1}
25	2.784	25	1.662	25	1.952
50	2.767	50	1.350	50	1.942
75	2.766	75	1.437	75	1.346

提案手法 1		提案手法 2	
n	MSE×10^{-8}	n	MSE×10^4
25	1.644	25	**8.426**
50	0.858	50	**8.347**
75	0.570	75	**8.392**

に進んでいるときには提案手法 2 を用いると良いことが分かる．このことがクラックデータ 2，クラックデータ 3 に当てはめたときに同様に分かった．また，変量効果モデル，混合効果モデルについても同様な結果が得られている．

また，製品の寿命を知るためにそれまでに得られている劣化データから未来の劣化度合いを予測する必要がある．そこで，次に予測精度の評価も行ったが，大量の実劣化データを得ることが難しいため，ここでは予測精度を測る方法としてシミュレーションを選択した．あらゆる母集団に対しての予測精度を測るために，サンプルを発生させるモデルは Peng (2015) の固定効果モデルで形状関数 $\Lambda(t)$ は $\Lambda(t) = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, $\Lambda(t) = \exp(a_1 t^2) - 1$，$\Lambda(t) = \log(1 + t)$，$\Lambda(t) = K\left(\frac{1}{1+be^{-ct}} - \frac{1}{1+b}\right)$ の 4 つのケースを試した．$\Lambda(t) = \exp(a_1 t^2) - 1$ とした時の結果を表 5 に示す．それ以外のケースについてはここでは省略する．

表 5 から，提案手法 1 を用いると予測精度が低くなるが，提案手法 2 を用いると予測精度が高くなることが分かる．サンプルを発生させるモデルの形状関数を $\Lambda(t) = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ としたときは，形状関数に t^{γ} を用いたときに最も予測精度が高くなったが，それ以外の 2 つのケースでは表 5 の結果と同様に提案手法 2 が最も良い結果となった．

5 まとめ

本研究では故障の物理現象に基づいて提案されたBS分布に基づく劣化モデルの提案を行った．また，過去の多くの研究で用いられている4つの実劣化データに当てはめ，既存のモデルとの比較と評価を行った．さらに，形状関数をデータから推定するノンパラメトリック手法として，最尤法を用いた内挿のみの補間による手法（提案手法1）と，最尤法を用いた外挿付きのスプライン補間による手法（提案手法2）の2つを提案した．これらを，過去の研究であらゆる劣化データに対して当てはまりが良いことが分かっているIGモデルに組み込み評価を行った．BS劣化モデルの評価でも用いた4つの実劣化データを用いて対数尤度の観点で比較を行ったうえで，汎化性能を測るためにクロスバリデーションによる比較，さらに予測精度を測るためのシミュレーションによる評価も行った．

BS劣化モデルはレーザーデータに対しての当てはまりはIGモデルに劣ったが，IGモデルの当てはまりの度合いと近く，他の3つのクラックデータに対しての当てはまりは既存のモデルよりも非常に良い結果となった．また，提案手法により推定した形状関数の評価において，対数尤度の観点での比較では，提案手法1を用いた場合，比較を行ったほとんど全ての場合において劣化データに対して良い当てはまりを示した．提案手法2を用いた場合もほとんどの場合において既存の手法を用いた場合よりも良い当てはまりを示した．クロスバリデーションによる比較では，提案手法1を用いて推定した形状関数を用いたモデルは汎化性能が悪いことが分かった．一方で，劣化現象が時間に対して一定ではなく指数関数的に進んでいくような場合には，提案手法2を用いたモデルの方が既存の形状関数を用いたモデルよりも汎化性能が高くなることが分かった．最後にシミュレーションを用いた予測精度の比較では，提案手法1を用いた場合の予測精度が悪いことが分かった．一方で，シミュレーションを行った1つのケースでは既存の手法を用いた場合の方が予測精度が高かったが，それ以外の場合には提案手法2を用いた場合の予測精度が高いことが分かった．

本研究では，提案モデルであるBS劣化モデルの評価を固定効果モデルで行い，一般的にBS劣化モデルが劣化データに対して当てはまりが良くなることを示した．さらに，データから形状関数を推定するノンパラメトリック手法を2つ提案し評価を行った結果，そのうちの1つの手法である提案手法2を用いるとデータに対して当てはまりも良く，一部のケースにおいて汎化性能も高くなることを示した．また一般的に予測精度も高いことも示した．今後は，BSモデルを変量及び混合効果モデルに拡張することや加速劣化試験に用いることができるようにモデルに説明変数も組み込むことが課題となる．また本研究では，提案した手法で推定した形状関数をIGモデルに組み込み評価を行ったが，BSモデルや他の劣化モデルにも組み込み，さらなる評価を行うことも必要である．そして，提案した手法を用いて実際に製品の寿命予測を行い，メンテナンス時期のスケジューリングを行うことも今後の課題である．

参考文献

Abdel-Hameed, M. (2014). *Lévy Processes and Their Applications in Reliability and Storage.* Springer, New York.

Bagdonavičius, V. and Nikulin, M. S. (2000). Estimation in degradation models with explanatory variables. *Lifetime Data Analysis*, 7:85–103.

Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C. (1969). A new family of life distributions. *Journal of Applied Probability*, 6:319–327.

Doksum, K. A. and Hóyland, A. (1992). Models for variable stress accelerated life testing experiments based on Wiener process and the inverse Gaussian distribution. *Technometrics*, 34:74–82.

Meeker, W. Q. and Escobar, L. A. (1998). *Statistical Methods for Reliability Data.* John Wiley & Sons, New York.

Peng, C. Y. (2015). Inverse Gaussian processes with random effects and explanatory variables for degradation data. *Technometrics*, 57:100–111.

Rodríguez-Picón, L. A., Rodríguez-Picón, A. P., Méndez-González, L. C., Rodríguez-Borbón, M. I., and Alvarado-Iniesta, A. (2017). Degradation modeling based on gamma process models with random effects. *Communications in Statistics Simulation and Computation*, 47:1796–1810.

Tamaru, L. and Nagatsuka, H. (2019). On a stochastic degradation model based on the generalized inverse Gaussian distribution. *Asian Journal of Management Science and Applications*, 4:49–58.

Wasan, M. T. (1968). On an inverse Gaussian process. *Skandinavisk Aktuarietidskrif*, 51:69–96.

Wu, S. J. and Shao, J. (1999). Reliability analysis using the least squares method in nonlinear mixed-effect degradation models. *Statistica Sinica*, 9:855–877.

Wu, W. F. and Ni, C. C. (2003). A study of stochastic fatigue crack growth modeling through experimental data. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 18:107–118.