最適なポートフォリオによる資産運用を考慮した保険料の決定
Determination of Insurance Premiums
Considering Asset Management with Optimal Portfolio

経営システム工学専攻 山田大生

1 はじめに

生命保険契約の純保険料の算出は「収支相等の原則」が成り立つことを大前提として行われている. 収支相等の原則とは契約時点でみて, 保険会社にとっての収入現価と支出現価を等しくするという考え方である. 収入現価や支出現価を求めるには保険金支払事由の発生率 (予定死亡率など) と予定利率の 2 つの基礎率が必要となる. 生命保険契約は長期にわたるものが多く, 予定死亡率や予定利率が将来, 予定とは大きく外れる恐れがある. そのため将来の変動に備えて, これらは通常安全めに設定される (文献 [1]). このように実務上は割増した予定死亡率や予定利率を用いて保険料を算出するのが一般的である.

このような保険料算出方法に対し文献 [6] では, 割増の妥当性が明確ではないとして, 最適化モデルを利用した保険料決定手法を提案している. 文献 [6] は, 死亡率と運用利回りの分布を推定し, その分布から多数のシナリオを発生させることで不確実性を表現し, ファイナンス分野のリスク指標 Conditional Value-at-Risk (CVaR) を用いて損失リスクの上限制約を設けることで適切な保険料を決定している. この方法において, 運用利回りの分布は過去の保険会社の運用実績から推定されている. これを過去の運用実績からポートフォリオを推定していると考えると, 推定されたポートフォリオが最適なポートフォリオなら良いが, 他により保険料を低くすることができるようなポートフォリオがあるのならそのポートフォリオで資産運用を行った方が良いと考えられる.

本論文では上述の最適化モデルによって保険料を決定する手法を用いつつ, ポートフォリオ理論の考え方を用いて保険料を最も低くできるポートフォリオを見つけることを目的とする. 保険会社は安全資産とマーケットポートフォリオの組み合わせによって得られる効率的フロンティア上のポートフォリオに投資して資産運用を行うと考え, 効率的フロンティア上の各ポートフォリオの収益率の期待値と標準偏差から資産運用の分布を推定して文献 [6] の方法で保険料を算出し, 効率的フロンティア上のどのポートフォリオに投資するのが最適かということを調べる.

2 生命保険数学とポートフォリオ理論

2.1 生命保険数学

2.1.1 計算の基礎

まず, 生命保険契約の保険金支払事由となる死亡や生存について, その事由が発生する率をどのように表すかを紹介する.

ここで「生命表の x 歳の人」を (x) と表記することとする. また, x を年齢とし, x 歳の生存者数を l_x, x 歳の死亡者数を d_x とし, 生命表の最終年齢を ω と表す.

(x) が n 年間生存する確率 ${}_np_x$ は,

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \tag{1} $$

で表される.

(x) が n 年以内に死亡する確率 ${}_nq_x$ は,

$$ {}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - {}_np_x \tag{2} $$

で表される.

(x) が f 年間生存し, 次の 1 年以内に死亡する確率は,

$$ {}_{f|}q_x = \frac{d_{x+f}}{l_x} = \frac{l_{x+f} - l_{x+f+1}}{l_x} = {}_fp_x - {}_{f+1}p_x \tag{3} $$

で表される.

次に予定利率について述べる.

保険料の計算では契約時点から保険金支払が行われるまでの間に発生する利息を考慮する必要がある. 利息を考えるときに使用する利率は契約時に決定され, 契約期間中一定である. これを予定利率という. 利率を i としたとき,

$$ v = \frac{1}{1+i} \tag{4} $$

とする. この v を現価率と呼ぶ.v は 1 年後に払う金額 1 の現価である.

2.1.2 一時払保険料

保険契約締結の際にのみ払込み, 以後払込む必要のない保険料のことを一時払保険料という. 定期保険とは, 被保険者が契約時点から一定期間内に死亡した場合に一定額の保険金 (死亡保険金) が支払われる保険である. x 歳の被保険者が n 年以内に死亡したときに保険金 1 を死亡

年度末に支払う定期保険の一時払純保険料は $A^{1}_{x:\overline{n}|}$ で表される. 一時払純保険料 $A^{1}_{x:\overline{n}|}$ は,

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = v\, q_x + v^2\ {}_{1|}q_x + \cdots + v^n\ {}_{n+1|}q_x \tag{5}$$

となる.

2.1.3 生命年金

あらかじめ定められた期間中 (年金支給期間) に, 一定の間隔 (1 年, 半年など) をおいて継続的に支払われる一連の金額を年金という. 期始払, 年金額は 1 の有期生命年金の現価を $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ と表すが,

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + v\, p_x + v^2\ {}_2p_x + \cdots + v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x \tag{6}$$

となる.

2.1.4 収支相等の原則

保険料の額を P とすると, 会社の収入となるすべての保険料の現価は $P\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ となる. 一方, 保険給付の現価は 2.1.2 節で述べた一時払保険料と等しくなる. 保険会社にとっての収入現価は $P\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, 支出現価は一時払保険料ということになる. この両者を等しくするという考え方を収支相等の原則という. 以下で収支相等の原則に基づいて年払平準保険料を導く.

n 年定期保険で, 保険金 1 が死亡保険年度末に支払われる場合の年払保険料を $P^{1}_{x:\overline{n}|}$ とすると,

$$P^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{7}$$

となる.

2.2 ポートフォリオ理論

任意の資産から構成されるポートフォリオの, 実現可能な収益率の期待値と標準偏差の組み合わせを投資可能集合と呼ぶ.

株式などの収益率が変動する資産を危険資産, 国債などの収益率が確定的な資産を安全資産とする. 安全資産は投資収益率の標準偏差が 0 となるが, この安全資産の期待収益率をリスクフリー・レートと呼ぶ. また, 投資収益率の標準偏差が等しいときに投資収益率の期待値が最も高くなるポートフォリオを効率的ポートフォリオと呼び, 効率的ポートフォリオの集合を効率的フロンティアと呼ぶ.

危険資産のみを用いてポートフォリオを作り, ポートフォリオの収益率の期待値と標準偏差の関係をグラフで表すと効率的フロンティアは曲線で表される. 次にポートフォリオに安全資産も含めることを考える. リスクフリー・レートから効率的フロンティアに接線を 1 本引くことができるが, この接線を資本市場線と呼ぶ. また, 接点となるポートフォリオをマーケットポートフォリオと呼ぶ. 資本市場線上のポートフォリオは安全資産とマーケットポートフォリオの組み合わせにより実現することができる. 危険資産と安全資産からポートフォリオを作成するとき, この資本市場線上のポートフォリオが効率的ポートフォリオとなる.

本論文では保険会社は投資可能集合からポートフォリオを選択して資産運用を行うと考えるが, 投資可能なポートフォリオの中で効率的ポートフォリオについてのみ考える.

3 保険料算出方法

3.1 設定

今回想定する保険商品は死亡保険であり以下の設定に従うとする.

- ある一定の契約期間が存在する
- 契約者は契約期間中, 毎年度初めに保険料を支払う
- 保険料は毎期一定金額とする
- 被保険者が死亡した場合にのみ保険金受取人に保険金が支払われる
- 保険金は被保険者の死亡年度の中央で支払われるとする (保険金が被保険者の死亡時に即時で支払われることを近似する)
- 保険加入者数は各年齢で一定とする
- 途中解約はないものとする

具体的に契約期間を T 年, 保険金額を M 円として, これらを所与の値とする. そして文献 [6] を参考にし, 以下のようにパラメータと決定変数を設定する.

- $\mathcal{X} := \{X_L, X_{L+1}, \cdots, X_{U-1}, X_U\}$: 年齢の集合
- $w \in [0,1]$: ポートフォリオの中で安全資産が占めるウェイト (マーケットポートフォリオの占めるウェイトは $1-w$)
- $P^{(w)}_x$: ウェイト $w \in [0,1]$, 加入年齢 $x \in \mathcal{X}$ 歳の保険の年額保険料 (決定変数)

死亡率, 生存確率を 2.1 節の内容を用いて, 以下のように表す.

- ${}_{t|}q_x$: 加入時 $x \in \mathcal{X}$ 歳の加入者が加入してから t 年後 $\sim t+1$ 年後に死亡する確率
- ${}_tp_x$: 加入時 $x \in \mathcal{X}$ 歳の加入者の t 年目開始時点での生存確率

運用利回りについて, 不確実性を考慮するために以下

のような多数のシナリオを想定する.

- $\mathcal{S} := \{1, 2, \cdots, S\}$: 想定する運用利回りのシナリオの集合
- $p^{(w),(s)}$: ウェイト $w \in [0,1]$ の下でのシナリオ $s \in \mathcal{S}$ の生起確率
- $i_t^{(w),(s)}$: ウェイト $w \in [0,1]$, シナリオ $s \in \mathcal{S}$ の下での, 契約時から t 年目までの運用利回りの年率の平均

3.2 収支相等の原則に基づく保険料

まず保険会社の収入現価について説明する. 契約期間 T 年, ウェイト w, シナリオ s の下での加入時 x 歳の加入者 1 人あたりからの収入現価は以下のように表される.

$$\left\{1 + \frac{1}{1 + i_1^{(w),(s)}}\ p_x + \frac{1}{\left(1 + i_2^{(w),(s)}\right)^2}\ {}_2p_x + \cdots + \frac{1}{\left(1 + i_{T-1}^{(w),(s)}\right)^{T-1}}\ {}_{T-1}p_x\right\} P_x^{(w)} \tag{8}$$

式 (8) を $\bar{a}_x^{(w),(s)} P_x^{(w)}$ と表し, $\bar{a}_x^{(w),(s)}$ を加入時 x 歳の加入者 1 人あたりからの, 保険料 1 円あたりの収入現価を表す定数とする.

次に, 収入現価と同様に支出現価を求める. ここで保険金は各年度の年央に支払われることを考慮する. 加入時 x 歳の加入者 1 人あたりからの支出現価は以下のように表される.

$$\left\{\frac{1}{\left(1 + i_1^{(w),(s)}\right)^{\frac{1}{2}}}\ q_x + \frac{1}{\left(1 + i_2^{(w),(s)}\right)^{\frac{3}{2}}}\ {}_{1|}q_x + \cdots + \frac{1}{\left(1 + i_{T-1}^{(w),(s)}\right)^{T-\frac{1}{2}}}\ {}_{T-1|}q_x\right\} M \tag{9}$$

式 (9) を $\bar{c}_x^{(w),(s)}$ と表し, $\bar{c}_x^{(w),(s)}$ を契約期間 T 年, 保険金額 M 円, ウェイト w, シナリオ s の下での加入時 x 歳の加入者 1 人あたりからの支出現価を表す定数とする.

式 (8), 式 (9) から, x 歳加入の保険におけるウェイト w, シナリオ s の下での加入者 1 人あたりから得られる保険会社の利益は保険料 $P_x^{(w)}$ の関数として

$$R_x^{(w),(s)}\left(P_x^{(w)}\right) := \bar{a}_x^{(w),(s)} P_x^{(w)} - \bar{c}_x^{(w),(s)} \tag{10}$$

と表せる. また, 収支相等の原則に基づく保険料を $P_x^{\bar{(w)}}$ とすると, $P_x^{\bar{(w)}}$ は年齢ごとの期待利益が 0 になるように以下の方程式を解くことで求められる.

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} R_x^{(w),(s)}\left(P_x^{\bar{(w)}}\right) = 0 \tag{11}$$

ウェイト w, シナリオ s の下で保険会社が保険全体から被る損失は以下のように表される.

$$L^{(w),(s)}(\boldsymbol{P}) := \sum_{x \in \mathcal{X}} \left(\bar{c}_x^{(w),(s)} - \bar{a}_x^{(w),(s)} P_x^{(w)}\right) \tag{12}$$

ここで, $\boldsymbol{P}$ は保険料 $P_x^{(w)}, x \in \mathcal{X}$ を要素に持つ行列とする.

4 提案モデル

以下では, まず定式化を述べ, その後目的関数, 制約式の説明を述べる.

$$\text{最小化} \quad \sum_{x \in \mathcal{X}} \left(\frac{P_x^{(w)} - P_x^{\bar{(w)}}}{P_x^{\bar{(w)}}}\right)^2 \tag{13a}$$

$$\text{制約条件} \quad y + \frac{1}{1-\beta} \sum_{s \in \mathcal{S}} p^{(w),(s)}\ z^{(w),(s)} \leqq \eta \tag{13b}$$

$$z^{(w),(s)} \geqq L^{(w),(s)}(\boldsymbol{P}) - y,\ z^{(w),(s)} \geqq 0,\ s \in \mathcal{S} \tag{13c}$$

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} p^{(w),(s)}\ R_x^{(w),(s)}\left(P_x^{(w)}\right) \geqq \gamma_x^{(w)},\ x \in \mathcal{X} \tag{13d}$$

$$\xi_x P_x^{(w)} \leqq P_{x+1}^{(w)},\ x \in \mathcal{X} \backslash \{X_U\} \tag{13e}$$

ここで, 決定変数は $P_x^{(w)}$(保険料) と y と $z^{(w),(s)}$ である. 本論文では保険料を求めたいので, これらの決定変数のうち使用するのは $P_x^{(w)}$ である. y は VaR を表す決定変数, $z^{(w),(s)}$ は CVaR を求めるための補助的な決定変数である.

(13a) 式について, 本研究では, 決定変数である保険料と収支相等の原則による保険料の差を「保険料の変更額」として, 保険料の乖離を「保険料の変更割合の 2 乗」と定義しこの乖離の最小化を目的とする. したがって, $\left(\frac{P_x^{(w)} - P_x^{\bar{(w)}}}{P_x^{\bar{(w)}}}\right)^2$ の全年齢での総和の最小化が目的となる.

(13b) 式と (13c) 式は, CVaR に関する制約である. β は CVaR の信頼水準である. (13c) 式の制約の下で (13b) 式で信頼水準 β の CVaR の上限を η とする.y は VaR を表す変数である.

(13d) 式は各保険の期待利益の下限を定める制約となる. ウェイト w における x 歳加入の保険の期待利益を $\gamma_x^{(w)}$ としている.

(13e) 式は加入年齢の増加に対して保険料が低くなることを防ぐ制約である. $x+1$ 歳加入の保険料は x 歳加入の保険料の ξ_x 倍以上になるとする.

以上の最適化問題を, $w \in [0,1]$ を動かして解き, w ごとに保険料を求めることで, 最も保険料を低くできるポートフォリオを探す.

5 数値実験

5.1 基本のパラメータ

- 対象年齢及び性別: 30〜69 歳男性 ($X_L \coloneqq 30,\ X_U \coloneqq 69$)
- 保険の契約期間: 10 年 ($T \coloneqq 10$)
- 保険金額: 10,000,000 円 ($M \coloneqq 10000000$)
- シナリオ数: 4,000($S \coloneqq 4000$)
- 各シナリオの生起確率: $\frac{1}{4{,}000}$ ($p^{(w),(s)} \coloneqq \frac{1}{4000},\ s \in \mathcal{S}$)
- CVaR の信頼水準: 0.95 ($\beta \coloneqq 0.95$)
- CVaR の上限: 0 ($\eta \coloneqq 0$)
- 各保険から得られる期待利益の下限: 0 円 ($\gamma_x^{(w)} \coloneqq 0,\ x \in \mathcal{X}$)
- 年齢単調性パラメータ: 1 ($\xi_x \coloneqq 1,\ x \in \mathcal{X}$)

保険会社が運用に用いるポートフォリオにおいて安全資産が占めるウェイト (w) は 0〜1 の間の任意の値をとることができるが, 本論文では 1〜0.255 の間を 0.005 刻みで動かすこととする.

保険加入者数

保険加入者数は各年齢で一定とする.

死亡率

死亡率は日本アクチュアリー会作成の標準生命表 2018 に基づく値とする.

運用利回り

本研究ではマーケットポートフォリオとして日経平均, 安全資産として 10 年国債を想定する. まず, 過去のデータから日経平均の収益率の平均 μ と標準偏差 σ を推定する. また,10 年国債の収益率を r_f とする.

$\sigma' = \sqrt{\log\left(\frac{\sigma^2}{(1+\mu)^2} + 1\right)},\ \mu' = \frac{1}{2}\left(\log(\mu+1)^2 - \sigma'^2\right)$ とし, 各シナリオ, 年数 (s,t) に対応させて対数正規分布 $\mathrm{LN}(\mu', \sigma')$ に従う乱数を発生させ, $I_t^{(s)}$ とする. そして, 運用利回りを $i_t^{(s)} \coloneqq \left(\prod_{k=1}^{t} I_k^{(s)}\right)^{\frac{1}{k}} - 1$ とする. なお, 推定した日経平均の収益率 μ は 0.032051, 標準偏差 σ は 0.231384 であり,10 年国債の収益率を r_f は 0.001 とする.

5.2 最適保険料

上述の設定で保険料を算出した結果を図 1 に示す. 最適化問題では 30 歳から 69 歳の各年齢で加入する男性の保険料を算出するがここでは 30 歳の保険料を示している.

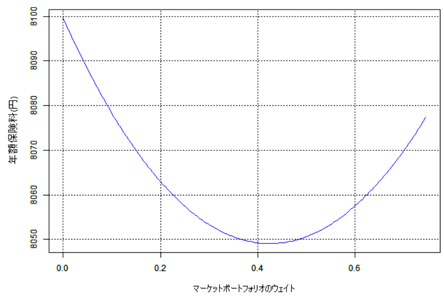

図 1 30 歳加入の保険料

ポートフォリオにおける安全資産とマーケットポートフォリオのウェイト (w) を変えることで, 保険料 ($P_x^{(w)}$) は変化し, あるウェイトで最小の値をとりそうだということがと分かる.

6 おわりに

提案したモデルではポートフォリオを選択することで保険料が変化し, その中で最も低い値をとる保険料がありそうだということが分かった.

本論文では死亡率は標準生命表 2018 の値を使用し, すべての年齢において保険加入者が一定として保険料を算出したが, これらについて実際のデータを用いてモデルを作ることでより実際の保険会社の立場に近い形で保険料の算出が行えると考えられる.

また, 本論文では全年齢の各ウェイトごとの保険料を算出して, それぞれの年齢において最低保険料となるウェイトを探したが, 年齢によって最低保険料となるウェイトは異なるため, これらのウェイトの中からどの値を選ぶのが最適なのかを考える必要がある.

参考文献

[1] 二見隆. 生命保険数学 ('92 改訂版) 上巻. 日本アクチュアリー会, 1992.

[2] 枇々木規雄. ポートフォリオ入門. オペレーションズ・リサーチ, Vol. 61, No. 6, pp. 335–340.

[3] 石野雄一. 道具としてのファイナンス. 日本実業出版社, 2005.

[4] 岩沢宏和, 黒田耕嗣. 損害保険数理. アクチュアリー数学シリーズ 4. 日本評論社, 2015.

[5] 黒田耕嗣. 生命保険数理. アクチュアリー数学シリーズ 5. 日本評論社, 2016.

[6] 柴崎佑翔, 南條慶輔, 高野祐一, 水野眞治. リスク評価に CVaR を用いた保険料決定の最適化モデル. オペレーションズ・リサーチ, Vol. 58, No. 8, pp. 469–475.