

# 長方形形状の障害物をもつ領域における警備員巡視路問題 Watchman Routes in a Polygon with Rectilinear Axis-Aligned Holes

情報工学専攻 吉野 航平  
Information and System Engineering, KOHEI Yoshino

## 1 序論

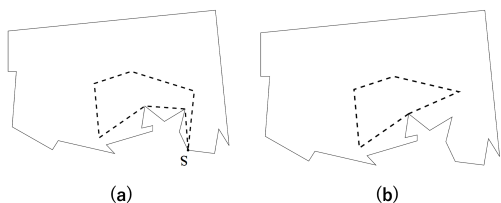


図 1. 最短警備員巡視路の一例 ([4] より引用)

ある領域を示す多角形  $P$  において、 $P$  の全体を視認できるようにできるだけ少ない人数の警備員を配置する問題を美術館問題という。  $P$  内に障害物がある（現実施設でいう柱など）場合や、警備がある程度動くことができる場合など、様々な条件下で研究がなされている。本研究では、警備員が自由に動き回りを想定し、決められた人数で巡回する警備員が、領域多角形内全体を視認できるようなルートを作成する問題である警備員巡視路問題を考える。

警備員巡視路問題は出発点  $s$  が固定されている場合と、固定されていない場合の 2 つに分類される。図 1 の (a) に  $s$  が固定された場合、(b) に固定されていない場合の一例をそれぞれ示す。点線が巡視路を表している。

領域多角形が障害物のない単純多角形であるとき、多項式時間で経路を決定するアルゴリズムに加え、線形時間で解く近似アルゴリズムが提案されている。しかし、障害物が存在する多角形を考慮した場合については NP-困難である [2] ことが知られており、近似アルゴリズムについてもほとんど成果がない。

## 2 既存研究と基礎知識

### 2.1 カット

図 2 に、領域多角形  $P$  内における、出発点  $s$  を通過するような最短警備員巡視路の様子を示す。図 2(a) のように、巡視路は線分の連続で構成されており、進む方向を変える点が存在する（以後、進路変更という）。領域多角形内には出発点  $s$  から回りを見たとき見えない部分が存在する。領域多角形や障害物の陰になっている部分をのぞき込むために、巡視路は適切な場所ま

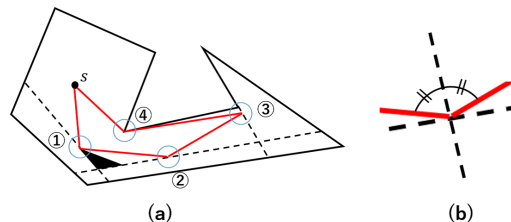


図 2. 必須カット上での進路変更

で移動しなければならない。それらの不可視領域が見えるような境界線は線分で表される。それらをカットといい、カットは  $P$  の内角が  $180$  以上の頂点（凹頂点）や、障害物の辺の延長線上に現れる。なかでも必ず訪れなくてはならないカットを必須カットという。複数存在する必須カットを全て訪れ、 $s$  に戻ってきたとき警備員巡視路が完成する。必須カットは領域多角形を 2 つの部分領域に分割する線分である。分割された部分領域のうち  $s$  を含む領域を必須領域という。

この警備員巡視路を最短にするために、既存研究では多くの定理が示されてきた。最短警備員巡視路の進路変更について次のような定理が存在する。

#### 最短警備員巡視路における進路変更 [3]

最短警備員巡視路における進路変更は次のいずれかである。

- 領域多角形か障害物の頂点、必須カットの端点での進路変更
- 必須カット上での鏡面反射による進路変更

鏡面反射とは必須カットに対して、経路の入射角と反射角が等しくなるような反射を表す。具体例として、図 2(a) の最短警備員巡視路の進路変更点②では、図 2(b) のように鏡面反射をしていることが観察できる。この最短警備員巡視路の 4 つの進路変更のように定理を満足した経路を構築しなければならない。

以降、既存研究の  $P$  内に障害物がない問題について説明する。必須カットを訪れる順番について次のような定理が存在する。

### 単純多角形内の必須カット [3]

単純多角形内の最短警備員巡視路は、凹頂点に現れた各必須カットを、 $P$ の外周において（反）時計回りの順番で現れた対応する凹頂点の順番で訪れる。

既存研究の多くはこれらの定理を満足した最短警備員巡視路を得るため、次節で説明するミラーリングという手法を用いている。

#### 2.2 ミラーリング

ミラーリングとは、複数ある必須カットの訪れる順番がわかったうえで、必須カット上での鏡面反射を実現した巡視路を求めるときに用いられる手法である。図3にイメージを示す。図3(a)は元の領域多角形を表

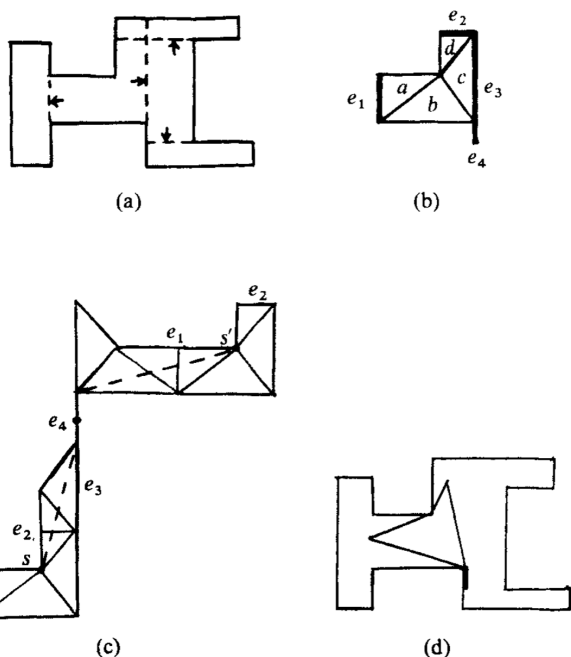


図3. ミラーリングによる最短警備員巡視路探索 ([3] から引用)

しており、内部の矢印が必須カット（破線）を示している。必須カットをもとに、必須領域以外の部分を削除すると (b) の多角形になる。時計回りの順番に必須カットに  $e_1, \dots, e_4$  と名前をつける。障害物がない領域における最短経路では三角形分割が用いられるため、三角形分割をし、それぞれの領域に名前 ( $a \sim e$  のアルファベット) をつけて考える。(b) の多角形内において、 $e_1$  からつぎの必須カット  $e_2$  へ向かう途中に通過する三角形は  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$  の順番である。 $e_2$  に到達後、鏡面反射を行い  $e_3$  に向かうが、その時三角形  $d$  にもう一度入り、 $c$  を経て  $e_3$  に到達することになるだろう。このような経路の予想に従い、図3(c) のように多

角形を構成する。ここで固定点を図3(c)の  $s$  とする。図3(c)左下の  $e_1$  から  $e_2$  まで三角形をつなげていった後、 $e_2$  を境に折り返すようにして三角形  $d$  を付け足していき、これを  $s$  と同じ頂点  $s'$  が現れるまで繰り返す。以後、ミラーリングで現れる点を像と呼ぶ。こうしてできた多角形の内部において、 $s$  から  $s'$  への最短経路（図3(c)の破線）を求めると、その経路が訪れる三角形の順番は図3(b)の多角形内を巡視したときに訪れるであろう順番に等しくなる。こうしてできた経路をもとの図形に対応させると図3(b)の多角形内の巡視路が得られる。図3(c)で必須カット上をまっすぐ通過していた場合、折り返すようにもとに戻されるので、前節(2)の性質にある鏡面反射が実現される。最後に必須領域以外の部分をもとに戻して最短警備員巡視路が得られた（図3(d)）。

ミラーリングの構成手順を見てわかるように、必須カットを訪れる順番と必須領域が明確であることがこの手法を用いる条件となる。

#### 2.3 可視グラフとダイクストラ法

障害物のない単純多角形内で最短経路を探索するとき、三角形分割でできる対角線群に向かう最短経路を順番に求めていくのに対し、障害物が存在する領域では、経路の候補となる頂点間のパスを構築し、出来上がったグラフ内でダイクストラ法適用するのが最適である。障害物内を通過することはできないこと、障害物の頂点以外からパスが生じないことを考慮して作られるグラフを可視グラフという。可視グラフのパスは全頂点間において、お互いが視認できる。つまり、線分を引いたときいかなる線分とも交差しない場合に、パスを引くことによって作られる。図4にイメージを

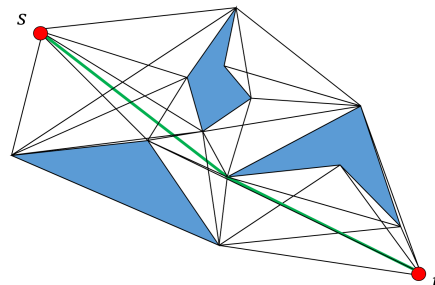


図4. 可視グラフと  $s$  から  $t$  への最短経路

示す。グラフのノード数を  $n$  とすると、愚直にグラフを構成した場合、計算時間は  $O(n^3)$  である。交差判定を行う辺を絞ったりアレンジメントを用いることで、

前者は  $O(n^2 \log n)$ , 後者は  $O(n^2)$  と計算時間を抑えることができる。また、ダイクストラ法は愚直であっても計算時間は  $O(n^2)$  である。

## 2.4 既存研究

領域多角形の頂点数を  $n$  とする。単純多角形内の警備員巡視路について、最も良い結果として知られているのは Dror ら [1] による、固定点ありの場合  $O(n^3 \log n)$ , 固定点なしの場合  $O(n^4 \log n)$  のアルゴリズムである。また近似アルゴリズムとしては譚が、固定点ありの場合は線形時間で  $\sqrt{2}$ -近似アルゴリズム [5] を、固定点なしの場合は線形時間で 2-近似アルゴリズム [6] をそれぞれ提案している。しかし、 $P$  内に障害物が存在する問題については、ほとんど成果が得られていない。

## 3 提案手法

ここでは、多項式時間で解ける状況について、その状況と、多項式時間アルゴリズムの概要を説明する。以後、障害物の個数を  $k$  とする。

### 3.1 問題設定

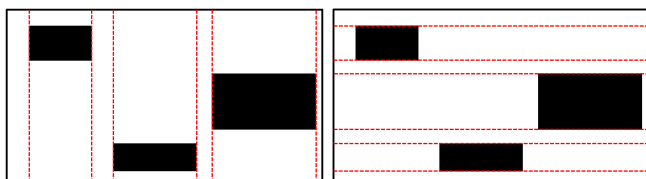


図 5. 障害物は上下左右で重なりがない

施設と障害物がともに軸平行 (axis-aligned: 辺が  $x$  軸・ $y$  軸のいずれかと平行) な長方形であり、かつ上下左右で重なりがない状況 (図 5) を考える。

### 3.2 障害物の配置が単調である場合

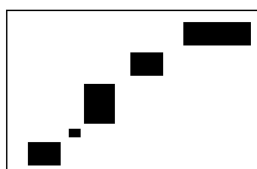


図 6. 単調な配置

障害物の配置が単調であるとは、障害物を  $x$  座標の小さいほうから順にみたとき、最初の障害物より次の障害物の  $y$  座標の方が大きい (または小さい) とき、他のすべての障害物でも同じようになっていることをいう。例えば、最初の障害物よりも次の障害物の  $y$  座標が大きければ、右肩上がりのような配置になる (図 6)。以上の状況において次の定理をみたとす。

### 定理 1

障害物と領域多角形がともに軸平行な長方形で、上下左右重なりがなく単調な配置である場合、 $s$  がどこにあったとしても、領域多角形全体を視認するには全障害物の最小包囲長方形の 4 辺を訪れることが必要十分である。

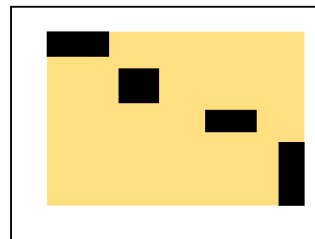


図 7. 包囲長方形 (黄色の部分)

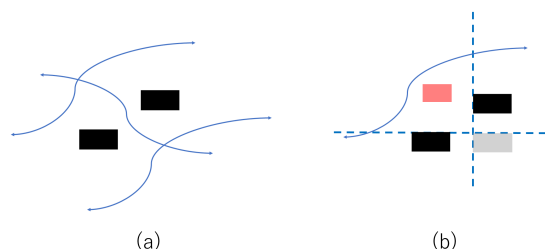


図 8. 経路の動き方と見え方

なぜ 4 辺を訪れなければならないかは容易にイメージができる。必須領域を巡回し、4 辺と接する障害物の裏側を見るには 4 辺を訪れるしかない。なぜ 4 辺だけで十分なのかを、図 8 に沿って説明する。障害物付近での経路の動き方は図 8(a) のような、2 つの障害物の横を通る 2 種類の経路か、間を通る経路に分類される。間を通る場合はこの 2 つの障害物が作りうる影の部分をすべて視認することができる。間を通らない場合、議論となるのは図 8(b) のグレーの部分だが、この部分の反対側、すなわち経路が通っている側で、経路は破線が表す 90 度の間を通り抜け、かつ経路とグレーの部分の間には障害物 (例えば赤い障害物) が全く存在しない。よって、障害物を経て逆側からでも視認ができる。これが隣り合った全障害物間でみたとされるため全体を視認することができるといえる。

次に以下の定理が成り立つ。

### 定理 2

障害物と領域多角形がともに軸平行な長方形で、上下左右重なりがなく単調な配置である場合、最短警備員巡視路は必ず包囲長方形の 4 辺を (反) 時計回りの順番で訪れる。

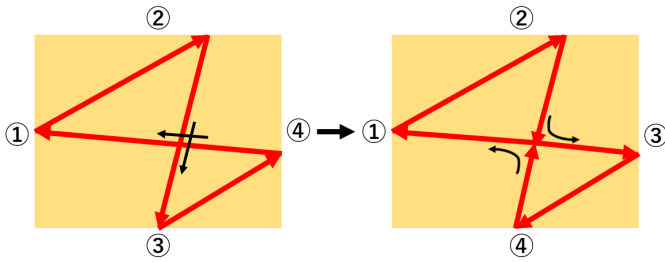


図 9. 4本の必須カットの訪れる順番 (①~④は訪れている順番を示している)

もし、(反)時計回り以外の訪れ方をすると、経路の途中で交差が生じてしまう。交差がある場合、図9のように時計回りの巡回のように書き換えることができる。ならば最初から時計回りの最短巡回路は他の訪問順における最短巡回路より長くなることはないのである。

以上のことから、必須領域が明確であり、必須カット(今回は包囲長方形の4辺)を訪れる順番がわかっているため、ミラーリングを使用できる。

### 3.2.1 出発点が固定されている最短警備員巡視路

出発点  $s$  の配置で、包囲長方形の4辺のうち最初どの辺に向かうかの候補が異なる。包囲長方形の辺上に出発点  $s$  がある場合は、 $s$  が乗っている辺をスタート地点にすればよい。像  $s'$  が現れるまでミラーリングを行い、ダイクストラ法で  $s$  から  $s'$  最短経路を求め、もとの多角形にあてはめる。図10は実際に実装し、求めた経路を図示したものである。

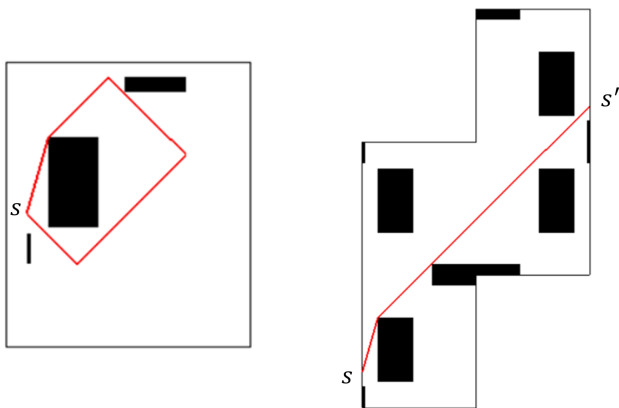


図 10. 出発点  $s$  が包囲長方形辺上にある場合の巡視路

出発点が内部に固定されている場合は4辺それぞれが最初に訪れる候補となるため、全て調べなくてはならない。 $s$  から4つの必須カットそれぞれを最初に訪

れる必須カットとしたミラーリングをお行えばよい。

出発点が外部に固定されている場合は、どこにあるかで最初に訪れる辺が変化する。しかし、外部のどこに固定されていても一意に決まるため、一度のミラーリングで最短警備員巡視路を求めることができる。

このアルゴリズムの計算時間は、 $s$  がどこにあっても可視グラフの作成時間とダイクストラ法の計算時間に依存するため、障害物の頂点数を  $k$  としたとき  $O(k^2)$  である。

### 3.2.2 出発点が固定されていない最短警備員巡視路

この問題については、以下の定理を示した。

最短警備員巡視路が通過しうる点

状況1において出発点が固定されていないとき、全障害物のいずれかの頂点を通過するような最短警備員巡視路が必ず1つは存在する。

従って、障害物の全頂点を出発点として問題を解き、それらを比較することで最短警備員巡視路が得られることを示した。よって、障害物の頂点数を  $k$  としたとき計算時間は  $O(k^3)$  である。

## 4 今後の課題

本研究では、領域多角形内に障害物があっても、多項式時間で最短警備員巡視路問題が解けるような状況が存在すること示すことができた。今後の課題は、この状況から領域多角形の形状や、障害物の形状・配置の制限を徐々に緩和していき、多項式時間で解ける限界を証明を用いて示すことである。また、多項式時間で解が求まらない状況について、近似解を考案することである。

## 参考文献

- [1] M. Dror, A. Efrat, A. Lubiw, and J. S. B. Mitchell, "Touring a sequence of polygons," *Proceedings of the 35th Symposium on Theory of Computing (STOC'03)*, pages 473–482. ACM, 2003.
- [2] A. Dumitrescu and Csaba D. Tóth, "Watchman tours for polygons with holes," *Computational Geometry*, volume 45, issue 7:326–333, 2012.
- [3] W. Cin and S. Ntafos, "Shortest Watchman Route in Simple Polygons," *Discrete and Computational Geometry*, 6(1):9–31, 1991.
- [4] N. Xu, "On The Watchman Route Problem and Its Related Problems," The Graduate Center, The City University of New York Dissertation Proposal.
- [5] X. Tan, "Approximation algorithms for the watchman route and zookeeper's problems," *Discrete Applied Mathematics*, 136(2–3):363–376, 2004.
- [6] X. Tan, "A linear-time 2-approximation algorithm for the watchman route problem for simple polygons," *Theoretical Computer Science*, 384(1):92–103, 2007.