CHOW GROUP OF ZERO-CYCLES AND SYNTOMIC COMPLEX

数学専攻　山本　健人
Kento　Yamamoto

1. 序

数論幾何において重要なスキームの不変量の一つとして Chow 群がある. 申請者の当該学位論文の第 I 部の主題は 0 サイクルの Chow 群である. 体 K または $\mathbb{Z}$ 上有限型スキーム X に対して, 0 サイクルの Chow 群 $\mathrm{CH}_0(X)$ は次のように定義される.

$$\mathrm{CH}_0(X) := Z_0(X)/Z_0(X)_{\mathrm{rat}}.$$

ここで $Z_0(X) := \mathbb{Z}[X_{(0)}]$ で, $X_{(0)}$ は X の閉点全体の集合を表す. $Z_0(X)_{\mathrm{rat}}$ は X に含まれる 1 次元閉部分スキームの有理関数の因子であるような 0 サイクルたちが生成する部分群を表している. 例えば K を代数体とし, その整数環 $\mathscr{O}_K$ のスペクトラムを $X := \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_K)$ とした時, その 0 サイクルの Chow 群 $\mathrm{CH}_0(X)$ は数論で重要な K の不変量の一つであるイデアル類群 $Cl(K)$ と同型である. また Chow 群はスペンサー・ブロック氏によって高次 Chow 群として一般化された ([B]). この高次 Chow 群に関して, 数論的多様体のゼータ関数の特殊値に関する予想や, 代数体上の代数曲線に関する Bloch 予想などがあり重要な研究対象である. いま X を完備な代数多様体とした時, 次数写像を

$$\deg : \mathrm{CH}_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z},\ \deg\left(\sum n\cdot P\right) := \sum n\cdot[\kappa(P):K]$$

として定義する. このとき $A_0(X) := \mathrm{Ker}\,(\deg : \mathrm{CH}_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z})$ とおき, Chow 群の次数ゼロ部分と呼ぶ. この $\mathrm{CH}_0(X)$ や $A_0(X)$ は X の幾何的・数論的情報を反映している. 例えば高次元類体論ではエタール基本群と相互写像を介して繋がっており, これらを調べることで X の幾何的情報を汲み取る事が可能である. さらに $\mathrm{CH}_0(X)$ や $A_0(X)$ と深い関係がある不変量として $\mathrm{Br}(X) := H^2_{\acute{e}t}(X, \mathbb{G}_m)$ で定義される X の (コホモロジカル・) ブラウアー群がある. この $\mathrm{Br}(X)$ は X の幾何や数論の研究 (代数的サイクルの計算, ハッセ原理, ブラウアー・マニン障害 etc.) に応用されていて, $\mathrm{Br}(X)$ の群構造を計算することは大切である. 既存の結果として, 例えば X を局所体 K 上滑らかで射影的な幾何学的有理曲面としたとき, $A_0(X)$ と $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(K)$ の有限性が知られている. 一方でこれらのアーベル群としての具体的構造が解明されている例は少ない. [M2] や [U] では

幾何学的有理曲面である具体的な対角的3次曲面に対して, ブラウアー群 $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(K)$ の構造や生成元が詳しく研究されている. そこで第I部ではこのブラウアー群の構造や生成元を利用して, 3進体上の幾何学的有理曲面である対角的3次曲面に対して $A_0(X)$ の構造を調べた.

算術的スキーム X に対して, 上で定義した $\mathrm{CH}_0(X)$ によって高次元不分岐類体論が記述される. ところが因子に沿った暴分岐拡大などの情報を Chow 群で捉えようとする際, 本質的問題として $\mathbb{A}^1$ ホモトピー不変性の情報だけからは記述しきれないという問題が出てくる. この問題点を動機として, 近年モジュラス付き高次 Chow 群と呼ばれるものが導入された. この高次 Chow 群はモジュラス対と呼ばれる代数多様体とその上のカルティエ因子の組 (X, D) に対して定義されるもので, モジュラス付きモチーフ理論などとの関連も含めて多くの研究者たちの注目を集めている. 一方で数論的スキームの(高次)Chow 群を研究する上で重要な理論として, 佐藤周友氏によって構成された p 進 Tate 捻りの理論 ([Sat]) がある. この p 進 Tate 捻りのモジュラス対 (X, D) に対する拡張を考えるという動機から, まず加藤和也氏や辻雄氏のサントミック複体をモジュラス対に対して拡張することを試みた. 本論文第II部ではモジュラス対 (X, D) に対してサントミック複体を定義し, そのコホモロジー層を計算した. モジュラス対に対してサントミック複体を考える際には新たにカルティエ因子 D の重複度を考慮する必要があり, D は $\mathscr{O}_K$ 上平坦であるという仮定をおいた.

2. 主結果

以下, K を標数0の完備離散付値体, k をその剰余体で標数は $p > 0$ とする.

1. 対角的3次曲面のゼロサイクルの Chow 群の構造 (Part I): K として p 進体を考える. X を $\mathbb{P}^3_K := \mathrm{Proj}(K[T_0, T_1, T_2, T_3])$ の方程式

$$T_0^3 + T_1^3 + T_2^3 + c \cdot T_3^3 = 0, \quad (c \in K^* \backslash (K^*)^3)$$

で定義された滑らかで射影的な幾何学的有理曲面を対角的3次曲面と呼ぶ. 以下 $\zeta_3(\neq 1) \in \overline{K}$ は1の原始3乗根を表すものとする.

先ず [SS] において $p = 3$, $\zeta_3 \in K$ かつ $\mathrm{ord}_K(c) \equiv 1 \mod 3$ の場合に, 次いで [U] において $p = 3$, $\zeta_3 \in K$, $\mathrm{ord}_K(c) \equiv 2 \mod 3$ かつ K の絶対分岐指数が3より大きい時に $A_0(X)$ の構造が決定された. 証明の流れを簡単に振り返ると, これらの証明で重要な役割を果たしたのが序でも述べたリクテンバウム・マニンペアリング ([L], [M1]) の非退

化性である. 次の写像がリクテンバウム・マニンペアリングより導かれる

$$\Phi_X : A_0(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

いま, この写像の単射性はコリオ・テレーヌにより示されている. この全射性を示すのに [SS] の命題 4.1.3 の判定法が用いられた. 具体的にはブラウアー群 $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(K)$ の構造と明示的な生成元がわかっているという事実 (マニン, [M2]) を用いてミルナーシンボルの巧妙な計算によって証明されている. この流れを受け, Part I ではこの両者の結果を含み, かつ基礎体 K に 1 の原始 3 乗根が含まれていない場合にも $A_0(X)$ の構造を決定した. さらに $A_0(X)$ を生成する 0 サイクルを明示的に構成した. 以下が Part I の主結果である.

Theorem 0.1. ([Y1], Part I, Theorem 1.2) $p = 3$ とし, $\mathrm{ord}_K(c) \not\equiv 0 \pmod 3$ と仮定する. この時, $A_0(X)$ は有理点のなすクラスで生成される. さらに, 次が成り立つ.

$$A_0(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & if\ \zeta_3 \notin K, \\ (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2} & if\ \zeta_3 \in K. \end{cases}$$

この定理の証明では [SS] や [U] で用いられたミルナーシンボルの計算による [SS] の命題 4.1.3 を用いなかった. その代わり Φ_X の単射性と, $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(K)$ の構造と明示的な生成元に関する事実を用い, ヒルベルト記号を用いて生成元となるサイクルを具体的に構成する方針で証明を行った. 具体的な生成元の形と計算の詳細は本論文 Part I 第 3 章に述べられている.

2. モジュラス付きサントミック複体について (Part II): 半安定還元をもつスキーム X に対して, 辻氏によって ([Tsu1], [Tsu2], [Tsu3]) サントミック複体 $\mathcal{S}_n(q)_{(X,M_X)}$ がスキーム上の log 幾何を使って定義され, p 進消滅サイクルとの関係が研究された. 第 II 部ではこの複体をモジュラスペア (X, D)(X は整数環上半安定還元な正則スキーム, D は X 上のカルティエ因子で整数環上平坦) に対して拡張した. この複体の定義を簡単に述べておく. いくつかの仮定の下, 辻氏のサントミック複体をそれぞれ X と D の場合に考える. この X のサントミック複体から D へのサントミック複体の射の写像錐をとって局所的な場合のモジュラス付きサントミック複体を定義した ([Y2], Part II, Definition 5.2 参照). これらを大域的に貼り合わせて出来た複体を $\mathscr{S}_n(q)_{X|D}$ と表し, これもまたモジュラス付きサントミック複体と呼ぶ. 特に $D = \emptyset$ の時は, 辻氏の定義したサントミック複体 $\mathcal{S}_n(q)_{(X,M_X)}$ と一致している. 上のモジュラス付きサントミック複体 $\mathscr{S}_n(q)_{X|D}$ に

対してシンボル写像

$$\mathrm{Symb}_{X|D} : (1 + I_{D_{n+1}})^{\times} \otimes (M^{gp}_{X_{n+1}})^{\otimes q-1} \longrightarrow \mathcal{H}^q \left(\mathscr{S}_n(q)_{X|D}\right)$$

を定義した. ここで $X_{n+1} := X \otimes \mathbb{Z}/p^{n+1}$, $D_{n+1} := D \otimes \mathbb{Z}/p^{n+1}$ である. $M_{X_{n+1}}$ は X_{n+1} に付随した log 構造である. また, $I_{D_{n+1}}$ は D_{n+1} の定義イデアルを表す. このシンボル写像について次の結果が得られた.

Theorem 0.2. ([Y2], Part II, Theorem 6.4) $n \geq 1$ は整数とする. $0 \leq q \leq p-2$ の時, シンボル写像

$$\mathrm{Symb}_{X|D} : (1 + I_{D_{n+1}})^{\times} \otimes (M^{gp}_{X_{n+1}})^{\otimes q-1} \longrightarrow \mathcal{H}^q \left(\mathscr{S}_n(q)_{X|D}\right)$$

の余核は D の素因子の重複度に関してミッタク・レフラーゼロである.

この定理の証明は辻氏の方法 (cf. [Tsu1], [Tsu2], [Tsu3]) を敷衍して行われる. 詳細の計算は Part II §7 に述べてある.

References

[B] S. Bloch, *Algebraic Cycles and Higher K-theory.* Adv. Math. **61**, 267–304 (1986)

[L] S. Lichtenbaum, *Duality theorems for curves over p-adic fields.* Invent. Math. **7**, 120–136(1969)

[M1] Y. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne. In: Actes du Congrès International des Mathématiciens, Nice, 1970,* Tome 1, 401–411. Gauthier-Villars, Paris 1971

[M2] Y. I. Manin, *Cubic forms: algebra, geometry, arithmetic.*(2nd.ed.) Translated from Russian by Hazewinkel, M. (North-Holland Math. Library, 4), North-Holland Publishing Co. Amsterdam, 1986

[Sat] K. Sato, *p-adic étale Tate twists and arithmetic duality(with an appendix by Hagihara, K.).* Ann. Sci. Ećole. Norm. Sup. (4) **40**, 519–588 (2007)

[SS] S. Saito and K. Sato, *Zero-cycles on varieties over p-adic fileds and Brauer groups.* Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **47**, 507–537 (2014)

[Tsu1] T. Tsuji, *Syntomic complexes and p-adic vanishing cycles.* J. Reine Angew. Math., **472**, 69-138 (1996)

[Tsu2] T. Tsuji, *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case.* Invent. Math., **137**, 233–411 (1999)

[Tsu3] T. Tsuji, *On p-adic nearby cycles of log smooth families.* Bull. Soc. Math. France **128**, 529–575 (2000)

[U] T. Uematsu, *Zero-cycles on diagonal cubic surfaces over p-adic fields.* Math. Z., **279**, 1047–1066 (2015)

[Y1] K. Yamamoto, *On generators of the Chow group of zero-cycles on diagonal cubic surfaces over 3-adic fields.* Acta Arith. **181**, 75–84 (2017)

[Y2] K. Yamamoto, *On syntomic complex with modulus for semi-stable reduction case.* preprint 2019, arXiv:1907.03983.