

# Analysis of negative differential conductivity and lifetime of bound states in holographic conductors

-ゲージ・重力対応を用いた負性微分電気伝導と束縛状態の寿命の解析-

物理学専攻 石垣秀太

Shuta Ishigaki

## 概要

負性微分電気伝導（NDC）とは、印加電場の増大に対し電流が減少する現象である。NDCを示す電気素子としては江崎ダイオードやサイリスタがあり、スイッチング回路や発信回路として広く応用されている。江崎ダイオードにおけるNDCは接合におけるトンネル効果によってその仕組みがよく理解されている。一方で、強相関絶縁体でもNDCは広く見られる。[1] こうした接合を伴わない物質における非パリティックな電気伝導でのNDCのメカニズムは未だ分かっていない。NDCは非線形電気伝導であり、ジュール熱の発生により詳細釣り合いが成立しない非平衡系となっている。電場の小さい領域であれば、線形応答理論による解析が可能であるが、NDCの非線形性よりこれは難しい。よって、強相関絶縁体で見られるNDCのメカニズムを理解するには、線形応答理論を超えた非平衡系の解析手法が必要となる。

本研究では、ゲージ・重力対応[2-4]を非平衡系の解析手法として用いることで、NDCのメカニズムを探った。ゲージ・重力対応またはAdS/CFT対応とは、超弦理論から示唆されるゲージ理論と重力理論との間を結ぶある種の対応関係である。これを用いると、ある極限の下で多体系としてのゲージ理論を、曲がった時空中の古典的場の理論へと置き換えて解析することができる。これにより、非平衡系の困難を回避して解析を行うことが可能となる。

荷電粒子多体系の重力双対モデルであるD3-D7モデル[5]において電気伝導度を調べると、NDCを再現することができる。[6] しかしながら、巨視的物理量の期待値を直接モデルから計算できるゲージ・重力対応の特徴から、微視的理論の視点でのこのNDCのメカニズムは分かっていなかった。本研究では、系に存在する正負荷電粒子からなる束縛状態の寿命を、ゲージ重力対応を用いた解析により調べることで、この系におけるNDCのメカニズムを探った。解析の結果、NDCを示す領域では、印加電場の増大に対して束縛状態の寿命が長くなるという振る舞いが得られた。直感的には、正負荷電粒子からなる束縛状態は電場を強めればより壊れやすくなる予想されるため、これは直感に反する振る舞いである。一方で、本研究の系では電流を担うキャリアは全て対生成によって供給される。上記の結果から、NDCの領域では主に束縛状態の崩壊プロセスによりキャリアが供給されており、電場の増大に伴ってこの崩壊プロセスが抑制されるため、電流が減少するというNDCのメカニズムが示唆された。[7]

また、論文ではD3-D7モデルにおける束縛状態の解析の別の応用として、散逸を伴う系におけるカイラル対称性の自発的破れに伴い生じる南部ゴールドストーンモードの分散関係の解析についても論じた。解析の結果、有効場理論によるモデルと同じタイプの分散関係を得ることができた。[8]

## ゲージ・重力対応

ゲージ・重力対応の主張は、 $d$ 次元のゲージ理論と $d+1$ 次元の超重力理論の分配関数が等しいというものである。ここから導かれる次の関係式を用いることで、ゲージ理論の物理量の期待値を計算することができる。

$$\left\langle \exp \left( \int d^d x \mathcal{O} \phi_{(0)} \right) \right\rangle = \exp \left( -\bar{S}_{\text{grav}} \right) \Big|_{\tilde{\phi}(z=0, x) = \phi_{(0)}(x)} \quad (1)$$

これはGubser-Klebanov-Polyakov/Witten関係式[3, 4]とよばれる。ここで左辺の $\mathcal{O}$ はゲージ理論の演算子、 $\phi_{(0)}$ はそれに共役な外場である。右辺は $d + 1$ 次元の反ド・ジッター時空（AdS時空）の上での超重力理論の作用 $\bar{S}_{\text{sugra}}$ を用いて書かれ、 $z$ がAdS時空の動径座標で $z = 0$ がAdS境界、 $\tilde{\phi}(z, x)$ は対応する重力理論の場である。 $\bar{S}_{\text{grav}}$ は作用をon-shellで評価することを意味しており、重力理論の場の境界条件としてAdS境界での値を外場として与える。右辺は古典場の理論を解けば計算でき、左辺はゲージ理論の分配関数であるので、これを外場で変分すれば演算子の期待値を得ることができる。

## 計算モデル

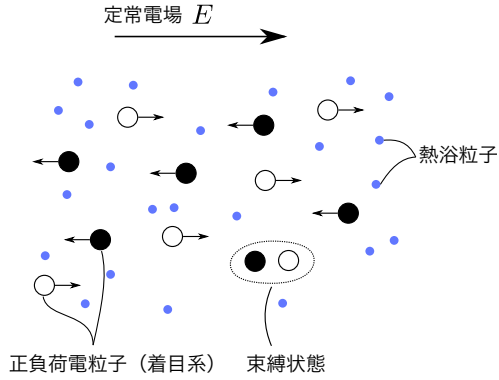


図1 ゲージ理論側でのモデルの概略図

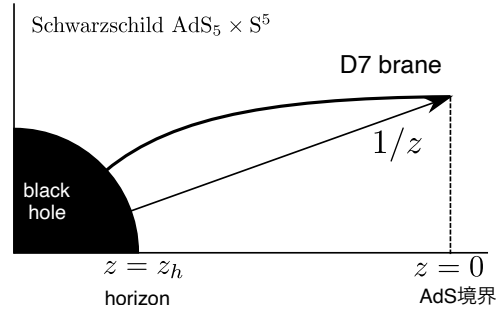


図2 重力理論側でのモデルの概略図

本研究では荷電粒子多体系の重力双対モデルであるD3-D7モデル[5]を採用して解析を行う。図1にゲージ理論側でのモデルの概略図を示した。着目系は温度 $T$ の熱浴と相互作用する正負荷電粒子（粒子・反粒子）からなる系で、系にはこれらの粒子が束縛した状態が存在する。正負荷電粒子の数は互いに等しく、電荷密度ゼロの設定を考える。定常電場 $E$ を印加すると正負荷電粒子が対生成され、電流が生じる。

このモデルにおける重力理論側での対応物は、Schwarzschild  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ 時空とその上に置かれたD7ブレーン（超弦理論における高次元膜状物体）となる。図2に重力理論側でのモデルの概略図を示した。 $z = z_h$ はブラックホールホライズンの位置であり、Hawking温度と $T = \sqrt{2}/(\pi z_h)$ で関係づく。ブラックホール時空はこの温度の熱浴に対応し、D7ブレーンが着目系に対応する。Schwarzschild  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ 時空は次の計量で表される。

$$ds_{10}^2 = \frac{1}{z^2} \left[ -\frac{f(z)^2}{\tilde{f}(z)} dt^2 + \tilde{f}(z) d\vec{x}^2 \right] + \frac{dz^2}{z^2} + d\Omega_5^2. \quad (2)$$

ここで、 $f(z) = 1 - z^4/z_h^4$ ,  $\tilde{f}(z) = 1 + z^4/z_h^4$ である。 $d\Omega_5$ は単位5次元球面の線素である。D7ブレーンの作用は次のDirac-Born-Infeld作用で書くことができる。

$$S_{\text{D7}} = -\frac{\tau_7}{g_s} \int d^8 \xi \sqrt{-\det(g_{ab} + F_{ab})}, \quad g_{ab} = g_{MN} \frac{\partial X^M}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^N}{\partial \xi^b}. \quad (3)$$

ここで、 $\tau_7$ はD7ブレーンの張力、 $g_s$ はストリング結合定数である。 $\xi^a$ はブレーン上の世界面座標を表している。 $X^M$ はブレーンの埋め込みを表す10次元時空の座標で、 $g_{MN}$ は(2)式で与えられる計量であり、 $g_{ab}$ は誘導計量とよばれる。 $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ はブレーン上に存在するベクトル場の場の強さである。 $X^M, A_a$ の運動方程式を解いて、(1)式のGKP/W関係式を使うことにより、電流密度などの値を計算することができる。

## 束縛状態とQNM

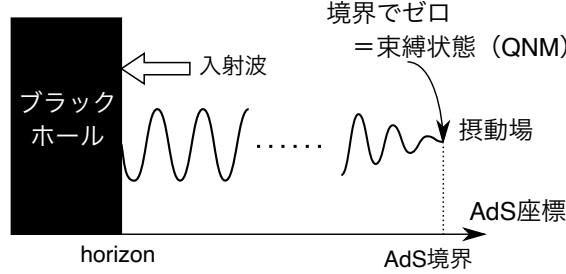


図3 重力理論のある種モードであるQNM。ゲージ理論側の束縛状態に対応する。

ゲージ・重力対応の処方によると、散逸を伴う系での束縛状態は、ブラックホール時空中での場のquasinormal mode (QNM)と呼ばれるある種モードと対応する。[9] ゲージ・重力対応の文脈におけるQNMとは、ブラックホールホライズンでの入射波条件とAdS境界におけるvanishing Dirichlet境界条件によって決まる2点境界値問題の解である。図3にその概略図を示した。

D3-D7モデルにおいて、D7プレーン上の摂動場のQNMを調べれば、これは着目系に存在する正負荷電粒子からなる束縛状態に対応する。本研究ではベクトル場に対して  $A_a d\xi^a = (-Et + a_1(z))dx^1 + A(z, t)dx^\perp$  という形を仮定して解析を行った。ここで、 $a_1(z)$ は背景解で  $x^1$  方向の電流に対応する部分であり、 $A(z, t)$ は  $x^\perp = x^{2,3}$  方向の摂動場である。摂動場の運動方程式は次の形で書かれる。

$$\begin{aligned} \partial_z [\sqrt{-\det G_{ab}g^{\perp\perp}} (\gamma^{zz} \partial_z A(z) - i\omega \gamma^{tz} A(z))] \\ - i\omega \sqrt{-\det G_{ab}g^{\perp\perp}} \gamma^{tz} A'(z) - \omega^2 \sqrt{-\det G_{ab}g^{\perp\perp}} \gamma^{tt} A(z) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $G_{ab} = g_{ab} + F_{ab}$  であり、 $\gamma^{ab}$ は  $\gamma_{ab} = g_{ab} - F_{ac}g^{cd}F_{db}$  から  $\gamma^{ac}\gamma_{cb} = \delta^a_b$  で定義される。この方程式で  $A(z)$ は摂動場のフーリエ変換、 $\int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(i\omega t)A(z, t)$ を意味する。この運動方程式と境界条件から、QNMの解と周波数の組みが求まる。一般に、QNMの周波数  $\omega$ は複素数で与えられ、系が安定な場合はその虚部は負の値となる。実部と虚部を  $\omega = \omega_R + i\omega_I$  と書くと、それぞれ対応する束縛状態のエネルギー  $\mathcal{E} = \omega_R$  と崩壊幅  $\Gamma/2 = -\omega_I$  と解釈することができる。ここから、束縛状態の崩壊幅または寿命を読み取ることができる。

## 束縛状態の寿命と電場の関係

図4の上側に、電流密度  $J$  と電場  $E$  の関係を示した。  $J$  が小さい領域でNDCが見られる。[6] 図4の下側には、QNMの周波数から読み取った束縛状態の寿命と背景電場の関係を示した。このグラフから読み取れるように、NDCの見られる領域では  $\partial(-\omega_I)/\partial E < 0$  となっており、束縛状態の崩壊幅  $-\omega_I$  は電場  $E$  を増大させるほど小さくなるという振る舞いが得られた。崩壊幅は寿命の逆数であるので、電場の増大に伴い束縛状態が長寿命になると言える。束縛状態を構成する正負荷電粒子対には電場によって逆向きの力が働く。直感的には、電場を増大させれば束縛状態は壊れやすくなり、寿命は短くなると予想されるが、NDCが見られる領域での振る舞いはこれに反するものとなった。一方で、本研究の系では電流を担うキャリアは全て対生成によって供給される。図4で  $(-\omega_I) = 0$  のとき  $J = 0$  となっていることから、NDCが見られるこの領域では主に束縛状態の崩壊プロセスによってキャリアが供給されていることが示唆される。これらの結果から、本研究で用いたモデルでは「電場の

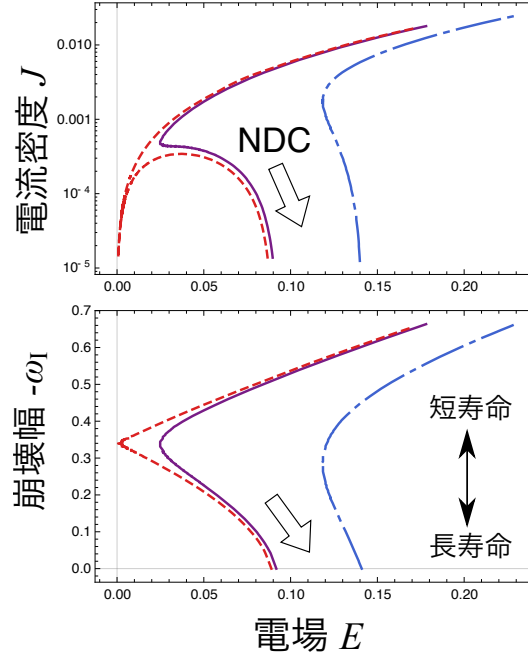


図4 (上) 電流密度 $J$ と電場 $E$ の関係。(下) 束縛状態の崩壊幅 $-\omega_I$ と電場 $E$ の関係。左から順に $T = 0.34385, T = 0.34364, T = 0.33898$ での結果を示した。ここでは荷電粒子質量を $m_q = 1$ と置いた。

増大に伴って束縛状態の崩壊プロセスが抑制され、キャリア供給が減るため電流が減少する」というメカニズムによってNDCが起きていると理解することができる。[7]

## References

- [1] H. Aoki, N. Tsuji, M. Eckstein, M. Kollar, T. Oka, and P. Werner, “Nonequilibrium dynamical mean-field theory and its applications”, *Reviews of Modern Physics* **86**, 779 (2014).
- [2] J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity”, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998), arXiv:hep-th/9711200.
- [3] E. Witten, “Anti-de sitter space and holography”, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998), arXiv:hep-th/9802150.
- [4] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from non-critical string theory”, *Phys. Lett. B* **428** (1998), arXiv:hep-th/9802109.
- [5] A. Karch and E. Katz, “Adding flavor to AdS / CFT”, *JHEP* **06**, 043 (2002), arXiv:hep-th/0205236.
- [6] S. Nakamura, “Negative differential resistivity from holography”, *Prog. Theor. Phys.* **124**, 1105 (2010), arXiv:1006.4105 [hep-th].
- [7] S. Ishigaki and S. Nakamura, “Mechanism for Negative Differential Conductivity in Holographic Conductors”, *JHEP* **20**, 124 (2020), arXiv:2008.00904 [hep-th].
- [8] S. Ishigaki and M. Matsumoto, “Nambu-Goldstone mode in non-equilibrium systems from AdS/CFT correspondence”, (2020), arXiv:2012.01177 [hep-th].
- [9] P. K. Kovtun and A. O. Starinets, “Quasinormal modes and holography”, *Phys. Rev. D* **72**, 086009 (2005), arXiv:hep-th/0506184.