完全グラフの部分グラフとしてのデイシーグラフについて
Dacey graphs as subgraphs of the complete graphs

数学専攻　松井 悠太朗
Yutaro MATSUI

1　はじめに

デイシーグラフとそれに関する HD-graph や cograph はクリークと密接に関係するグラフであり, 最大クリークの発見などに有用である.
1973 年に Sumner は完全グラフから任意の 1 辺を取り除いてもデイシーグラフとなることを示した [9]. 本論文では, これを拡張し, 任意の完全グラフに対して, デイシーグラフであることを保ったまま全ての辺を取り除く方法を発見した.

2　定義

グラフ (graph)とは，ふたつの集合 $V(G)$，$E(G)$ と，ひとつの関数ψ_Gの組，$(V(G), E(G), \psi_G)$ をいう. V は空集合ではなく，その要素を G の***頂点 (vertex)***とよぶ. $E(G)$ は $V(G)$ とは素な集合で，その要素を G の***辺 (edge)*** という. ψは***接続関数 (incidence function)***といわれ，G の各辺に G の頂点の対を対応させる 両端点 u, v は***隣接 (adjacent)***しているといい，$u \sim v$ と表す.また，隣接していない時は $u \nsim v$ と表す. 頂点集合と辺集合がともに有限集合であるグラフを***有限 (finite)*** グラフという. グラフがループや多重辺をもたないとき, ***単純 (simple)*** であるという. ここでは有限で単純なグラフのみを扱う.
A を $V(G)$ の部分集合とする. A を頂点集合とし，両端点が A に属する G の辺全体を辺集合とする G の部分グラフを A により***誘導された (induced)*** G の部分グラフまたは，***誘導部分グラフ (induced subgraph)*** という. ここでは $V(G)$ の部分集合 A と，A により誘導される部分グラフを同じ A で表す. A の全ての頂点と隣接する頂点の集合を A の***近傍 (neighborhood)***といい，$N(A)$ と表す. すなわち,

$$N(A) = \{u \in V(G) \mid \text{各 } a \in A \text{ に対して } u \sim a\}$$

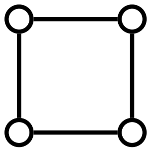
である. A が 1 つの頂点 v のみであるとき，$N(\{v\})$ を $N(v)$ と表す. 単純グラフの任意の 2 頂点が隣接しているとき，***完全 (complete)***であるという. n 頂点完全グラフを K_n で表す. 任意の 2 つの頂点が隣接する部分グラフを**完全部分グラフ**という. 完全部分グラフのうち，他の完全部分グラフに含まれないグラフを***クリーク (clique)***という. V 上の単純グラフで，$[V]^2 \backslash E$ を辺集合とする$\overline{G}$を G の ***complement*** という.

3　Dacey graph について

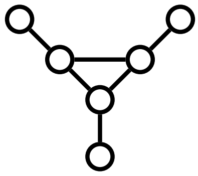
定義
G をグラフとする. G の各クリーク E と, 異なる頂点 u, v に対し,

$$E \subseteq N(u) \cup N(v) \Rightarrow u \sim v$$

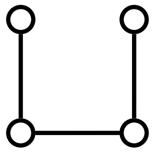
であるとき, G を***デイシーグラフ (Dacey graph)*** という.



(a) デイシーグラフ



(b) デイシーグラフ



(c) デイシーグラフでない P_4

定義

(i) G が <u>***point detemining***</u> であるとは G の異なる頂点 $u,\ v \in V(G)$ に対して,
$N(u) \neq N(v)$ であることとする.

(ii) G が <u>***point closed***</u> であるとは G の各頂点 $v \in V(G)$ に対して, $N(v) = \{v\}$ であることとする.

定理 3.1 (D. P. Sumner [11])
G をデイシーグラフとする. G が *point determining* であるための必要十分条件は,
整数 k に対し, *order* k の各完全部分グラフは高々 1 つの *order* $k+1$ のクリークに含まれること
である.

定理 3.2 (D. P. Sumner [11])
G をデイシーグラフ とする. G が *point closed* であるための必要十分条件は,
G の各クリーク E と $u \notin E$ に対し, $v_1, v_2 \in E$ が存在し, $v_1 \neq v_2, u \nsim v_1, u \nsim v_2$ となることである.

定理 3.3 (D. P. Sumner [9])
グラフ G が完全グラフであるための必要十分条件は,
G が *point closed* デイシーグラフで, 任意の辺を 1 つ取り除いても再びデイシーグラフとなること
である.

定義
全ての誘導部分グラフがデイシーグラフであるグラフを<u>***HD-graph***</u> (*Hereditary Dacey graph*) という.

4 デイシーグラフと cograph の関連

定義
<u>***cograph***</u> (*cograph*, *complementreduciblegraph*) を次のように再帰的に定義する.

(i) 1 つの頂点からなるグラフは *cograph* である.

(ii) G_1, G_2,. . ., G_k がそれぞれ *cograph* なら, その和集合 $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_k$ も *cograph* である.

(iii) G が *cograph* なら, その *complement* $\bar{G}$ も *cograph* である.

定理 4.1 (D. G. Corneil [3])
グラフ G に対して, 次の (i)〜(v) は互いに同値である.

(i) G は *cograph* である.

(ii) G は P_4を部分グラフとして含まない.

(iii) G の連結部分グラフの *complement* は非連結である.

(iv) G は *HD-graph* である.

(v) G の連結部分グラフの直径は高々 2 である.

5　完全グラフの部分グラフとしてのデイシーグラフ

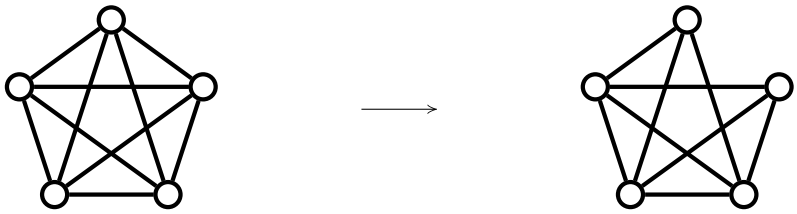
定理 5.1

完全グラフに対し，デイシーグラフであることを保ったままある順序に従って，頂点のみになるまで全ての辺を取り除くことができる．

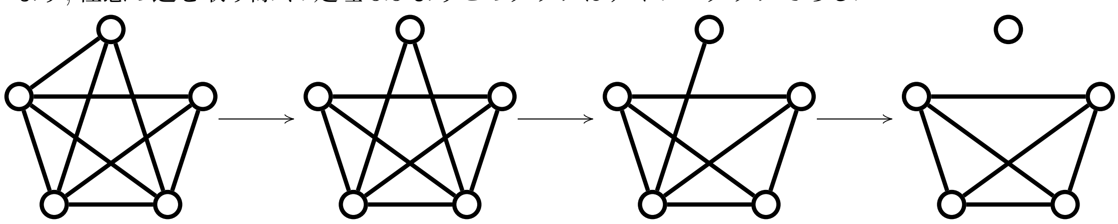
定理 5.1 の証明

K_n を n 頂点完全グラフとする．定理 3.3 より K_n から任意の辺を取り除いたグラフはデイシーグラフである．$e = uv$ とする．u に接続する辺を 1 つずつ取り除く．この操作で得られるグラフは全てデイシーグラフである．まずこれを示す．K_n から上の操作で，i 本の辺をとり除いたグラフ K_n^i とする $\left(K_n^1 = K_n - e, 1 \leq i \leq n-1\right)$．このとき，$K_n^i$ の complement $\overline{K_n^i}$ の連結成分は孤立点または，u と i 個の頂点を結んだ星グラフ S_iである．S_i と孤立点はそれぞれ P_4 を誘導部分グラフとして含まないので，$\overline{K_n^i}$ も P_4 を誘導部分グラフとして含まない．したがって，$\overline{K_n^i}$ は HD-graph である．よって定理 4.1 より，HD-graph は cograph なので，cograph の定義から cograph の complement は cograph なので，$\overline{\overline{K_n^i}}$=$K_n^i$ も cograph，すなわち HD-graph である．よって K_n^i はデイシーグラフである．この操作を u に接続する辺をすべて取り除くまで行って得られる K_n^{n-1} の連結成分は，孤立点と $n-1$ 頂点の完全グラフである．よって，新しくられた完全グラフに対して，すべての辺を取り除くまで帰納的にこの操作を行う．その操作で得られるグラフはすべてデイシーグラフである．　□

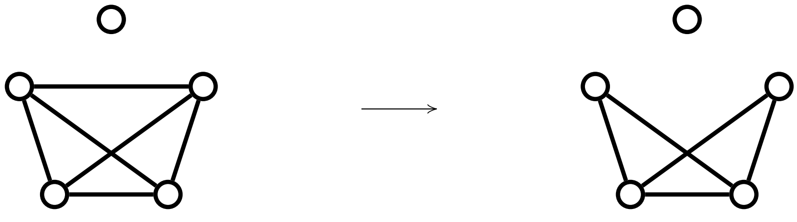
以下の図は 5 頂点完全グラフの場合の操作例である．



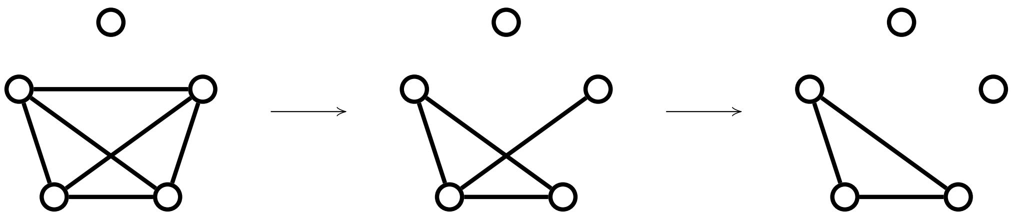
(i) まず，任意の辺を取り除く．定理 3.3 よりこのグラフはデイシーグラフである．



(ii) 次に取り除いた辺が接続していた頂点のうち一方に接続するすべての辺を
1 つずつ任意の順序で取り除く．



(iii) 連結成分は 4 頂点完全グラフと孤立点であるから，4 頂点完全グラフから任意の辺を 1 つ取り除く



(iv) 同様に, 取り除いた辺に接続する頂点のうち一方に接続する辺を 1 つずつ取り除く.

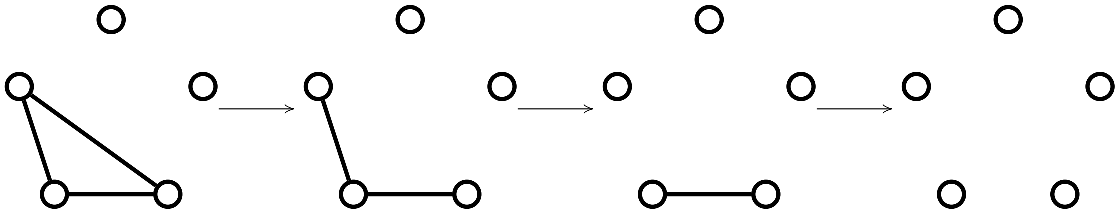


図 7

(v) 残りの辺を任意の順番で取り除く.

以上の手順で得られるグラフはすべてデイシーグラフである.

参考文献

[1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. Graph Theory. Springer, (2000).

[2] J. A. Bondy, U. S. R.Murty 著, 立花 俊一, 奈良 知恵 , 田澤 新成 共訳, グラフ理論の入門 共立出版, (1991).

[3] D.G. Corneil et al., Complement reducible graphs. Discrete Appl. Math. 3(3), 163-174 (1981).

[4] R. Diestel. Graph Theory. Springer, (2000).

[5] R. Diestel 著, 根上生也, 太田克弘 訳. グラフ理論, 丸善出版, (2012).

[6] Gregory Li, Clique Structure of Orthomodular Posets. (2020)

[7] H. Lerchs, On cliques and kernels, Dept. of Comp. Sci., University of Toronto (1971).

[8] H. Lerchs, On the clique-kernel structure of graphs, Dept. of Comp. Sci., 1 Jniversity of Toronto I (1972).

[9] D.P. Sumner, Dacey graphs. J. Aust. Math. Soc. 18(4), 492-502 (1974).

[10] D. P. Sumner, Forbidden Trees, Graph Theory Favorite Conjectures and Open Problems - 2, 69-89(2018).

[11] D. P. Sumner, 'Point determination in graphs', Discrete Math. 5 (1973), 179-187.