ブラックホールの 2 次相転移と臨界現象

- Second-order phase transitions of black hole geometry and critical phenomena -

物理学専攻　荒木秀典
Shusuke Araki

概要

本論文では電荷を持つブラックホール (RN-AdS ブラックホール) の相転移を考察する。ブラックホールの場合も 2 次相転移を示す臨界点が存在し、気液相転移（van der Waals の理論）と類似の振る舞いをする。本論文ではブラックホールの相転移を記述ためのランダウの自由エネルギーを状態方程式から求める方法を提案する。まず、通常の気液相転移の場合のランダウ自由エネルギーを状態方程式から求め、これと同様の方法で RN-AdS ブラックホールに関する状態方程式に基づいてランダウ自由エネルギーを求める。これによりブラックホールの相転移に関する一般論の構築に向けて、ブラックホールの相転移をより明快に理解が可能となった。

van der Waals 流体の理論とランダウ理論の対応関係

van der Waals 流体とは、van der Waals の状態方程式に従う流体のことである。van der Waals 方程式は

$$p = \frac{NT}{V-b} - \frac{N^2}{V^2}a. \tag{1}$$

但し、a と b は正の定数である。ここで、臨界点近傍での振る舞いを見るために、臨界点 $T_{\rm c} = \frac{8a}{27b}$, $p_{\rm c} = \frac{a}{27b^2}$, $v_c = 3b$ を用いて、

$$\begin{cases} \tilde{v} = v/v_{\rm c} = 1+\phi, \\ \tilde{T} = T/T_{\rm c} = 1+\tau, \\ \tilde{p} = p/p_{\rm c}, \end{cases} \tag{2}$$

を定義する ($|\phi| \ll 1, |\tau| \ll 1$)。これを (1) に代入して ϕ^3 まで展開すると

$$\tilde{p} = \frac{8(1+\tau)}{2+3\phi} - \frac{3}{(1+\phi)^2} \sim 1 + 4t - 6t\phi + 9\tau\phi^2 - \frac{3}{2}(1+9\tau)\phi^3, \tag{3}$$

となる。但し、磁場 $h=0$ に対応する場合を調べたいので、$\tilde{p} = 1+4\tau$ とする。$\tau\phi^2$, $\tau\phi^3$ を含む項を無視すると

$$-6t\phi - \frac{3}{2}\phi^3 = 0, \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \phi = \begin{cases} 0 \\ \pm\sqrt{-4\tau}. \end{cases} \tag{5}$$

$\phi \neq 0$ のとき $|\tau| \sim \phi^2$ のため $\tau\phi^2$, $\tau\phi^3$ の項を無視することと無矛盾である。これが臨界点近傍での van der Waals の状態方程式である。

一方で、系の秩序変数の期待値を求める方法として**ランダウ理論**を用いる方法もある。ランダウ理論は、

$$\tilde{f}(T,h,m) = f_0(T) - hm + A(T)m^2 + B(T)m^4 \tag{6}$$

で定義される**ランダウの自由エネルギー** $\tilde{f}$ からスタートする。但し、h は磁場、m は磁化（秩序変数）である。これから自由エネルギー f を求めるためには

$$f(T,h) = \min_m \tilde{f}(T,h,m) \tag{7}$$

の条件を課せばよい。ここで最小値を求める為に磁化 m での微分 $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial m} = 0$ を求める必要がある。これを計算すると

$$m^2 = -\frac{A}{2B} \tag{8}$$

を得る。但し、臨界点近傍では $\tilde{a}$ を正の定数として $A = \tilde{a}(T - T_{\rm c})$ となることが知られている。$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial m} = 0$ もまた秩序変数を与える式である。

以上で秩序変数の値を定める 2 つの式が登場した。これら二つに比例関係があるとみても良いだろう。つまり、van der Waals 流体の系のランダウの自由エネルギーを $\tilde{f}$ として

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi} \propto 6t\phi + \frac{3}{2}\phi^3. \tag{9}$$

この両辺を積分すると、

$$\tilde{f} \propto 3t\phi^2 + \frac{3}{8}\phi^4, \tag{10}$$

となる。但し、定数項は 0 とした。このようにランダウの自由エネルギーを状態方程式から求めることができる。これをブラックホールの場合に適用して議論を進める。

ブラックホールとランダウ理論

ここではブラックホールの 2 次相転移を記述する。ランダウ自由エネルギーがどのように書けるか議論する。ここでは、**電荷をもつ漸近的 AdS 時空中の** $n+1$ **次元ブラックホール**について考察する。このブラックホールは **Reissner-Nordström AdS Black Hole** と呼ばれており、ここでは単に RN-AdS ブラックホールと記すことにする。

ブラックホールとは、アインシュタイン方程式の解のひとつである。ここでブラックホールは、事象の地平線（ホライゾン）r_+ より内側の領域からは光さえも脱出できないという特徴をもつ。また、ブラックホールはホーキング温度と呼ばれる温度を持つことも分かっており、これを使ってブラックホールの熱力学を定義することができる [1]。RN-AdS ブラックホールの計量は

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{n-1}^2 \tag{11}$$

であり、但し、

$$f(r)=k-\frac{8\Gamma(\frac{n}{2})M}{(n-1)\pi^{\frac{n}{2}-1}r^{n-2}}+\frac{Q^2}{r^{2n-4}}+\frac{r^2}{l^2},\quad \Lambda=-\frac{n(n-1)}{2l^2}, \tag{12}$$

である [2][3][4][5]。ここで、$d\Omega_{n-1}$ は t 及び r 以外の部分の線素、M はブラックホール質量、Q はブラックホールの電荷、Λ は宇宙項 (<0) である。ところで、$k=1,0,-1$ の3つの値をとる。これはそれぞれ、$r=\infty$ での時空の境界面が「球面」「平坦な面」「双曲面」になる場合に対応している。ここでは特に $k=1$ と選び、$3+1$ 次元の場合について解析を進める。

このとき、RN-AdS ブラックホールのホライゾン近傍での物理学的諸量は以下のように書ける。

$$\Phi=\frac{Q}{r_+},\quad T=\frac{1}{4\pi}\frac{-\Lambda r_+^4+r_+^2-Q^2}{r_+^3}. \tag{13}$$

これから r_+ を消去して整理すると、

$$\frac{4\pi Q\Phi}{\beta l^2}-\frac{3Q^2}{l^2}+\Phi^4-\Phi^2=0 \tag{14}$$

を得る。但し、$\beta=1/T$ である。これがブラックホールの状態方程式である。臨界点近傍での振る舞いを調べたいため、$\Phi_c=\frac{1}{\sqrt{6}},\quad Q_c=\frac{l}{6},\quad T_c=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{l}{\pi}$ を用いて、

$$Q=Q_{\rm c}(1+q),\Phi=\Phi_{\rm c}(1+\phi),T=T_{\rm c}(1+\tau) \tag{15}$$

を導入する。但し、$|q|\ll 1,\quad |\phi|\ll 1,\quad |\tau|\ll 1$ であり、臨界点での値は電荷 Q 一定で求めたものである。これを (14) に代入すると、

$$\frac{4\pi Q_{\rm c}(1+q)\Phi_{\rm c}(1+\phi)}{\beta l^2}-\frac{3Q_{\rm c}^2(1+q)^2}{l^2}+\Phi_{\rm c}^4(1+\phi)^4-\Phi_{\rm c}^2(1+\phi)^2=0 \tag{16}$$

となる。これは秩序変数 ϕ を与える式であるから、$\tilde{f}$ をランダウの自由エネルギーとして 16 が、$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\phi}$ に比例すると考えてよい。これを積分して 4 次の項まで展開すると

$$\tilde{f}\propto\frac{1}{36}[-3q^2+q\tau+2q(1+4\tau)]\phi+\frac{1}{9}(q+\tau+q\tau)\phi^2+\frac{1}{36}\phi^4, \tag{17}$$

を得る。ここでは磁性体の場合の磁場 $h=0$ の場合に対応させたいため、磁場に相当する ϕ の 1 次の係数を 0 にすればよい。すると、

$$\begin{aligned}q&=\frac{1}{3}(1+4\tau\pm\sqrt{1+32\tau+16\tau^2})\\&=\frac{1}{3}[1+4\tau\pm(1+16\tau+\mathcal{O}(\tau^2))]\\&=\frac{1}{3}(-12\tau)+\cdots=-4\tau,\end{aligned} \tag{18}$$

を得る。但し、$\tau=0$ で $q=0$ を満たすように解を選んだ。$q=-4\tau$ の下では

$$\tilde{f}\propto f_0-\frac{\tau}{3}\phi^2+\frac{1}{36}\phi^4, \tag{19}$$

となる。$\tau\phi^2$ の項の係数が負となることから臨界点より高温で１次相転移が起きるという先行研究 [2][4][5] とも整合する結果となっている。これが本研究の結果である。今後の課題として、ここで得られたランダウ自由エネルギーをもとに**くりこみ群** [8] を用いた解析を考察することが考えられる。

参考文献

[1] R. M. Wald, "General Relativity," University of Chicago Press, (1984).

[2] A. Chamblin, R. Emparan, C. V. Johnson and R. C. Myers, "Charged AdS black holes and catastrophic holography," Phys. Rev. D **60** (1999), 064018 [arXiv:hep-th/9902170 [hep-th]].

[3] A. Chamblin, R. Emparan, C. V. Johnson and R. C. Myers, "Holography, thermodynamics and fluctuations of charged AdS black holes," Phys. Rev. D **60** (1999), 104026 [arXiv:hep-th/9904197 [hep-th]].

[4] D. Kubiznak and R. B. Mann, "P-V criticality of charged AdS black holes," JHEP **07** (2012), 033 [arXiv:1205.0559 [hep-th]].

[5] C. Niu, Y. Tian and X. N. Wu,
Phys. Rev. D **85**, 024017 (2012) doi:10.1103/PhysRevD.85.024017 [arXiv:1104.3066 [hep-th]].

[6] J. M. Maldacena, "The Large N limit of superconformal field theories and supergravity," Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113 [Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231] [hep-th/9711200].

[7] E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography," Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998), 253-291 [arXiv:hep-th/9802150 [hep-th]].

[8] K. G. Wilson and J. B. Kogut, "The Renormalization group and the epsilon expansion," Phys. Rept. **12** (1974), 75-199.